Ekonometrian tilastolliset menetelmät
Laskuharjoitus 4

2014, Helmikuu 6

1 Laskutehtäviä

1. Olkoot Y ja X skalaarisatunnaismuuttujia joille pätee

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 + \beta_1 X + u, \\ X &= \gamma_0 + \gamma_1 Y + v, \end{aligned}$$

missä $\mathrm{Cov}(u, v) = 0$. Osoita, että

$$\mathrm{Cov}(X, u) = \frac{\gamma_1 \mathrm{Var}(u)}{1 - \gamma_1 \beta_1}.$$

2. Olkoot Y ja X skalaarisatunnaismuuttujia joille pätee

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + u,$$

missä $0 < \mathrm{Var}(X) < \infty$, $0 < \mathrm{Var}(u) < \infty$ ja X on eksogeeninen:

$$\mathrm{Cov}(X, u) \neq 0.$$

Olkoot $(X_1, Y_1), \ldots, (X_N, Y_N)$ i.i.d. havaintoja (X, Y):n jakaumasta. Olkoon

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2},$$

missä $\bar{X} = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} X_i$ ja $\bar{Y} = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} Y_i$. Osoita, että

$$\hat{\beta}_1 \xrightarrow{p} \beta_1 + \frac{\text{Cov(X,u)}}{\mathrm{Var}(X)}.$$

kun $N \to \infty$.

3. Oletetaan, että $E(u^2 \mid X) = \sigma^2$, missä u on skalaarisatunnaismuuttuja, $X = (X_1, \ldots, X_K)$ on satunnaisvektori ja σ^2 on vakio. Osoita, että

$$E(u^2 X_i X_j) = \sigma^2 E(X_i X_j)$$

kaikille $i, j = 1, \ldots, K$.

4. Olkoon u reaaliarvoinen satunnaismuuttuja ja X $1 \times K$-satunnaisvektori. Oletetaan, että $E(X'u) = 0$ ja

$$E(u^2 X'X) = \sigma^2 E(X'X),$$

missä σ^2 on vakio. Merkitään $A = E(X'X)$ ja $B = \mathrm{Var}(X'u)$. Osoita, että

$$B = \sigma^2 A.$$

2 Tietokonetehtäviä

US-seatbelt data is a balanced panel from 50 U.S. States, plus the District of Columbia, for the years 1983-1997. These data were provided by Professor Liran Einav of Stanford University and were used in his paper with Alma Cohen "The Effects of Mandatory Seat Belt Laws on Driving Behavior and Traffic Fatalities," The Review of Economics and Statistics, 2003, Vol. 85, No. 4, pp 828-843. See

`http://www.stanford.edu/~leinav/pubs/RESTAT2003.pdf`

Datan lukeminen R:ään:

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/econometrics/SeatBelts.csv"
data<-read.table(file,skip=1,sep=",")
```

Datan lukeminen SAS:iin:

```
FILENAME myurl URL 'http://cc.oulu.fi/~jklemela/econometrics/SeatBelts.txt';

DATA SeatBelts;
   INFILE myurl firstobs=2;
   INPUT year fips vmt fatalityrate sb_usage speed65 speed70
   drinkage21 ba08 income age primary secondary;
RUN;
```

Muuttujat:

1. state = State (csv-tiedostossa, mutta ei txt-tiedostossa)
2. year = Year
3. fips = State ID Code
4. vmt = Millions of traffic miles per year. (Note: Number of fatalities =fatalityrate $\times$ vmt)
5. fatalityrate = Number of fatalities per million of traffic miles
6. sb_usage = Seat belt usage rate
7. speed65 = Binary variable for 65 mile per hour speed limit
8. speed70 = Binary variable for 70 or higher mile per hour speed limit
9. drinkage21 = Binary variable for age 21 drinking age
10. ba08 = Binary variable for blood alcohol limit $\leq .08\%$
11. income = Per capita income
12. age = Mean age
13. primary = Binary variable for primary enforcement of seat belt laws
14. secondary = Binary variable for secondary enforcement of seat belt laws

5. Valitse FatalityRate y-muuttujaksi ja sb_usage, speed65, speed70, drinkage21, ba08, log(income) ja age x-muuttujiksi. Suorita OLS-regressio ja testaa rajoitettta $\beta_3 = \beta_4$, missä β_3 on muuttujan speed65 kerroin ja β_4 on muuttujan speed70 kerroin.

   Vertaile F-testin ja Waldin testin antamia p-arvoja.

   Ohje: R:ssä voi käyttää pakettia "car", jonka saa käyttöön komennolla "library(car)" ja siinä komentoa "linearHypothesis".

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Tarkastellaan lineaarista mallia

$$Y = X\beta + u,$$

missä X on $1 \times K$-vektori, β on $K \times 1$-vektori ja $Y, u \in \mathbf{R}$. Olkoon $EX'u = 0$ ja olkoon $EX'X$ kääntyvä matriisi. Osoita, että

$$\beta = (EX'X)^{-1}EX'Y.$$

2. Olkoon

$$Y = X\beta + u,$$

missä Y ja u ovat reaaliarvoisia satunnaismuuttujia, X on $1 \times K$-satunnaisvektori ja β on $K \times 1$-vektori. Oletetaan, että $E(X'u) = 0$ ja $E(X'X)$ on kääntyvä matriisi. Olkoot (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, N$, i.i.d. havainnot (X, Y):n jakaumasta. Pienimmän neliösumman estimaattori on

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i' X_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} X_i' Y_i.$$

(a) Osoita, että

$$\hat{\beta} = \beta + \left(\sum_{i=1}^{N} X_i' X_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} X_i' u_i.$$

(b) Osoita, että

$$\hat{\beta} \xrightarrow{p} \beta,$$

kun $N \to \infty$.

3. Olkoon

$$Y = X\beta + u,$$

missä Y ja u ovat reaaliarvoisia satunnaismuuttujia, X on $1 \times K$-satunnaisvektori ja β on $K \times 1$-vektori. Oletetaan, että $E(X'u) = 0$ ja $E(X'X)$ on kääntyvä matriisi. Olkoot (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, N$, i.i.d. havainnot (X, Y):n jakaumasta. Pienimmän neliösumman estimaattori on

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i' X_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} X_i' Y_i.$$

(a) Osoita, että

$$\sqrt{N}\left(\beta - \hat{\beta}\right) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i' X_i\right)^{-1} N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N} X_i' u_i.$$

(b) Osoita, että

$$\sqrt{N}\left(\beta - \hat{\beta}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, A^{-1}BA^{-1}\right)$$

kun $N \to \infty$, missä $A = E(X'X)$ ja $B = \mathrm{Var}(X'u)$.

(c) Oletetaan, että $E(u^2 X'X) = \sigma^2 E(X'X)$. Osoita, että

$$B = \sigma^2 A,$$

jolloin $A^{-1}BA^{-1} = \sigma^2 A^{-1}$.