

Ekonomietrian tilastolliset menetelmät

Laskuharjoitus 6

2014, Helmikuu 20

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon $\mathcal{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)'$ $N \times 1$ -vektori, \mathcal{X} $N \times K$ -matriisi jonka riveinä ovat $1 \times K$ vektorit X_i ja \mathcal{Z} $N \times L$ -matriisi jonka riveinä ovat $1 \times L$ vektorit Z_i , $L \geq K$. Olkoon $P_Z = \mathcal{Z}(\mathcal{Z}'\mathcal{Z})^{-1}\mathcal{Z}'$ ja $\hat{\mathcal{X}} = P_Z\mathcal{X}$. Olkoon

$$\hat{\beta}_{2SLS} = (\hat{\mathcal{X}}'\hat{\mathcal{X}})^{-1}\hat{\mathcal{X}}'\mathcal{Y}.$$

- (a) Osoita, että $P_Z' = P_Z$.
(b) Osoita, että $P_Z P_Z = P_Z$.
(c) Osoita, että

$$\hat{\beta}_{2SLS} = (\hat{\mathcal{X}}'\mathcal{X})^{-1}\hat{\mathcal{X}}'\mathcal{Y}.$$

- (d) Osoita, että

$$\hat{\beta}_{2SLS} = [\mathcal{X}'\mathcal{Z}(\mathcal{Z}'\mathcal{Z})^{-1}\mathcal{Z}'\mathcal{X}]^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{Z}(\mathcal{Z}'\mathcal{Z})^{-1}\mathcal{Z}'\mathcal{Y}.$$

2. Olkoon

$$Y = X\beta + u,$$

missä Y ja u ovat reaaliarvoisia satunnaismuuttujia, X on $1 \times K$ -satunnaisvektori ja β on $K \times 1$ -vektori. Olkoon Z instrumenttimuuttujien satunnaisvektori, jonka dimensio on $1 \times K$. Oletetaan, että $E(Z'u) = 0$ ja $E(Z'X)$ on kääntyvä matriisi. Olkoot (X_i, Y_i, Z_i) , $i = 1, \dots, N$, i.i.d. havainnot (X, Y, Z) :n jakaumasta. IV-estimaattori on

$$\hat{\beta}_{IV} = \left(\sum_{i=1}^N Z_i'X_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N Z_i'Y_i.$$

(a) Osoita, että

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_{IV} - \beta) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i' X_i \right)^{-1} N^{-1/2} \sum_{i=1}^N Z_i' u_i.$$

(b) Osoita, että

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_{IV} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, (A')^{-1} B A^{-1})$$

kun $N \rightarrow \infty$, missä $A = E(X'Z)$ ja $B = \text{Var}(Z'u)$.

(c) Osoita, että $\text{Var}(Z'u) = E(u^2 Z'Z)$.

3. Olkoon $\mathcal{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)'$ $N \times 1$ -vektori, \mathcal{X} $N \times K$ -matriisi jonka riveinä ovat $1 \times K$ vektorit X_i ja \mathcal{Z} $N \times L$ -matriisi jonka riveinä ovat $1 \times L$ vektorit Z_i . Olkoon

$$L = K.$$

(a) Olkoon Γ kääntyvä $K \times K$ matriisi, $\tilde{Z} = Z\Gamma$ ja

$$\tilde{\beta} = (\tilde{Z}'\mathcal{X})^{-1} \tilde{Z}'\mathcal{Y}.$$

Olkoon

$$\hat{\beta}_{IV} = (\mathcal{Z}'\mathcal{X})^{-1} \mathcal{Z}'\mathcal{Y}.$$

Osoita, että

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta}_{IV}.$$

(b) Olkoon $P_{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}(\mathcal{Z}'\mathcal{Z})^{-1} \mathcal{Z}'$ ja $\hat{\mathcal{X}} = P_{\mathcal{Z}}\mathcal{X}$. Olkoon

$$\hat{\beta}_{2SLS} = (\hat{\mathcal{X}}'\mathcal{X})^{-1} \hat{\mathcal{X}}'\mathcal{Y}.$$

Osoita, että

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \hat{\beta}_{IV}.$$

4. Olkoon

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + u,$$

missä Y ja x ovat skalaarisatunnaismuuttujia ja $Eu = 0$. Olkoon z skalaarisatunnaismuuttuja, jolle pätee $\text{Cov}(z, u) = 0$, $\text{Cov}(z, x) \neq 0$ ja $E(u^2 | z) = \sigma^2$. Merkitään $X = (1, x)$ ja $Z = (1, z)$. Olkoot (X_i, Y_i, Z_i) , $i = 1, \dots, N$, i.i.d. havainnot (X, Y, Z) :n jakaumasta. Olkoon parametriverektorin $\beta = (\beta_0, \beta_1)'$ estimaattori

$$\hat{\beta}_{IV} = \left(\sum_{i=1}^N Z_i' X_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N Z_i' Y_i.$$

Tällöin parametrin β_1 estimaattori on

$$\hat{\beta}_{IV,1} = \frac{s_{yz}}{s_{xz}}, \quad (1)$$

missä $s_{yz} = N^{-1} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})(z_i - \bar{z})$, $s_{xz} = N^{-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})$,
 $\bar{x} = N^{-1} \sum_{i=1}^N x_i$ ja $\bar{z} = N^{-1} \sum_{i=1}^N z_i$

Osoita, että parametrin β_1 estimaattorin asympotoottinen varianssi on

$$\text{Avar}(\hat{\beta}_{IV,1}) = \frac{1}{N} \frac{\sigma^2 \text{Var}(z)}{\text{Cov}(x, z)^2}.$$

Vertaile suuretta $\text{Avar}(\hat{\beta}_{IV,1})$ OLS-estimaattorin asympotoottiseen varianssiin

$$\text{Avar}(\hat{\beta}_{OLS,1}) = \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{\text{Var}(x)}.$$

Ohje: Tehtävässä 2 IV-estimaattorin asympotoottinen varianssi on annettu kaavalla $(A')^{-1}BA^{-1}/N$, jolloin estimaattorin $\hat{\beta}_{IV,1}$ on tämän matriisin 2. rivin ja 2. sarakkeen alkio. Toinen tapa ratkaista tehtävä on johtaa asympotoottinen jakauma suoraan kaavasta (1).

2 Tietokonetehtäviä

U.S fertility data are taken from the 1980 Census. These data were provided by Professor William Evans of the University of Maryland and were used in his paper with Joshua Angrist Children and Thier Parents' Labor Supply: Evidence from Exogenous Variation in Family Size, American Economic Review, June 1998, Vol. 88, No. 3, 450-477. The file Fertility.dta (in STATA format) contains data on 254,654 women between the age of 21 and 35. The data in Fertility are a subset of the data used in the Angrist-Evans paper. (The file Fertility_Small contains data on a 30,000 randomly selected women from the Fertility data set. This smaller dataset is provided for students with memory limitations on their computer software.)

Ks. artikkeli

http://siteresources.worldbank.org/INTPUBSERV/Resources/Angrist_and_Evans.pdf
<http://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/5778.html>

Datan lukeminen R:ään:

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/econometrics/Fertility_small.csv"  
data<-read.table(file,skip=1,sep=",")
```

Datan lukeminen SAS:iin:

```
FILENAME
myurl URL 'http://cc.oulu.fi/~jklemela/econometrics/Fertility_small.txt';
DATA Fertility;
  INFILE myurl firstobs=2;
  INPUT ind $ morekids boy1st boy2nd samesex agemom black hispan othrace
  weeksworked;
RUN;
```

Muuttujat:

1. V1 = morekids = 1 if mom had more than 2 children
 2. V2 = boy1st = 1 if 1st child was a boy
 3. V3 = boy2nd = 1 if 2nd child was a boy
 4. V4 = samesex = 1 if 1st two children same sex
 5. V5 = agemom = age of mom at census
 6. V6 = black = 1 if mom is black
 7. V7 = hispan = 1 if mom is Hispanic
 8. V8 = othrace = 1 if mom is not black, Hispanic or white
 9. V9 = weeksworked = mom's weeks worked in 1979
5. (a) Valitse weeksworked vastemuuttujaksi, morekids selittäjäksi, same-sex instrumenttimuuttujaksi ja agemom, black, hispan ja othrace eksogeenisiksi selittäviksi muuttujiksi.
Testaa hypoteesia, jonka mukaan muuttujien hispan ja othrace kertoimet ovat samat.
- (b) Testaa hypoteesia, jonka mukaan muuttujien black, hispan ja othrace kertoimet ovat samat.

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Olkoon

$$Y = X\beta + u,$$

missä Y ja u ovat reaaliarvoisia satunnaismuuttujia, X on $1 \times K$ -satunnaisvektori ja β on $K \times 1$ -vektori. Olkoon Z instrumenttimuuttujien satunnaisvektori, jonka dimensio on $1 \times L$, missä $L \geq K$. Oletetaan, että $E(Z'u) = 0$, $\text{rank}(EZ'Z) = L$ ja $\text{rank}(EZ'X) = K$.

Merkitään

$$A = EX'Z, \quad B = EZ'Z,$$

$$\Pi = B^{-1}A' \text{ ja } X^* = Z\Pi.$$

(a) Osoita, että

$$\beta = [E(X^*X)]^{-1}E(X^*Y).$$

(b) Osoita, että

$$\beta = (AB^{-1}A')^{-1}AB^{-1}E(Z'Y).$$

2. Olkoon

$$Y = X\beta + u,$$

missä Y ja u ovat reaaliarvoisia satunnaismuuttujia, X on $1 \times K$ -satunnaisvektori ja β on $K \times 1$ -vektori. Olkoon Z instrumenttimuuttujien satunnaisvektori, jonka dimensio on $1 \times L$, missä $L \geq K$. Oletetaan, että $E(Z'u) = 0$, $\text{rank}(EZ'Z) = L$ ja $\text{rank}(EZ'X) = K$. Olkoot (X_i, Y_i, Z_i) , $i = 1, \dots, N$, i.i.d. havainnot (X, Y, Z) :n jakaumasta. 2SLS-estimaattori on

$$\hat{\beta}_{2SLS} = (A_N B_N^{-1} A'_N)^{-1} A_N B_N^{-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z'_i Y_i,$$

missä

$$A_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X'_i Z_i, \quad B_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z'_i Z_i.$$

(a) Osoita, että

$$\sqrt{N} (\hat{\beta}_{2SLS} - \beta) = (A_N B_N^{-1} A'_N)^{-1} A_N B_N^{-1} N^{-1/2} \sum_{i=1}^N Z'_i u_i.$$

(b) Osoita, että

$$\sqrt{N} (\hat{\beta}_{2SLS} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, V)$$

kun $N \rightarrow \infty$, missä

$$V = (AB^{-1}A')^{-1} AB^{-1}CB^{-1}A' (AB^{-1}A')^{-1},$$

$$A = EX'Z, \quad B = EZ'Z, \quad C = \text{Var}(Z'u) = E(u^2 Z'Z).$$

(c) Oletetaan, että $E(u^2 Z' Z) = \sigma^2 E(Z' Z)$. Osoita, että

$$V = \sigma^2 (AB^{-1}A')^{-1}.$$

3. Olkoon

$$Y = X\beta + u,$$

missä Y ja u ovat reaaliarvoisia satunnaismuuttujia, X on $1 \times K$ -satunnaisvektori ja β on $K \times 1$ -vektori. Olkoon Z instrumenttimuuttujien satunnaisvektori, jonka dimensio on $1 \times L$, missä $L \geq K$. Oletetaan, että $E(Z'u) = 0$, $\text{rank}(EZ'Z) = L$ ja $\text{rank}(EZ'X) = K$. Olkoot (X_i, Y_i, Z_i) , $i = 1, \dots, N$, i.i.d. havainnot (X, Y, Z) :n jakaumasta.

(a) Määrittele estimaattori matriisille

$$V = \sigma^2 (AB^{-1}A')^{-1},$$

missä

$$\sigma^2 = \text{Var}(u), \quad A = EX'Z, \quad B = EZ'Z.$$

(b) Määrittele estimaattori matriisille

$$V = (AB^{-1}A')^{-1} AB^{-1}CB^{-1}A' (AB^{-1}A')^{-1},$$

missä

$$C = E(u^2 Z' Z).$$