Ekonometrian tilastolliset menetelmät
Laskuharjoitus 7

2014, Helmikuu 26

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon $Z_i = (Z_{i,1}, \ldots Z_{i,K})$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $1 \times K$ ulotteinen stationaarinen vektoriaikasarja. Olkoon $EZ_i = 0$. Merkitään

$$\Gamma(j) = \mathrm{Cov}(Z_i, Z_{i+j}) = E(Z_i' Z_{i+j}),$$

missä $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Osoita, että

$$\Gamma(j) = \Gamma(-j)'$$

kaikille $j = 0, 1, \ldots$.

Ohje: Stationaarisuudesta seuraa, että esimerkiksi $E(Z_i' Z_{i-j}) = E(Z_{i+j}' Z_i)$.

2. Olkoon

$$Y = X\beta + u.$$

missä Y ja u ovat skalaarisatunnaismuuttujia, X on $1 \times K$ satunnaisvektori ja β on $K \times 1$ vektori. Oletetaan, että $Eu = 0$. Olkoot (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, N$, havainnot (X, Y):n jakaumasta.

Kirjoitetaan malli muodossa

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}\beta + \mathcal{U},$$

missä $\mathcal{Y} = (Y_1, \ldots, Y_N)'$ ja $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_N)'$ ovat $N \times 1$-vektoreita ja $\mathcal{X}$ on $N \times K$-matriisi jonka riveinä ovat $1 \times K$ vektorit X_i.

   (a) Osoita, että

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{OLS} \mid \mathcal{X}) = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1}\mathcal{X}'\Omega\mathcal{X}(\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1},$$

missä

$$\hat{\beta}_{OLS} = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{Y}$$

ja

$$\Omega = \mathrm{Var}(\mathcal{U} \mid \mathcal{X}) = E(\mathcal{U}\mathcal{U}' \mid \mathcal{X}).$$

(b) Määrittele sopiva estimaattori $\hat{\Omega}$ kun $\Omega = \sigma^2 I_N$, missä I_N on $N \times N$ identiteettimatriisi.

(c) Määrittele sopiva estimaattori $\hat{\Omega}$ kun $\Omega = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_N^2)$.

3. Olkoon

$$Y = X\beta + u.$$

missä Y ja u ovat skalaarisatunnaismuuttujia, X on $1 \times K$ satunnaisvektori ja β on $K \times 1$ vektori. Oletetaan, että OLS.1 ja OLS.2 pätevät. Olkoot (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, N$, heikosti riippuvat havainnot (X, Y):n jakaumasta. Testataan nollahypoteesia

$$H_0 : \rho(1) = 0,$$

missä $\rho(1) = \mathrm{Cor}(u_i, u_{i-1})$. Olkoon otosautokorrelaatio

$$\hat{\rho}(1) = \frac{\sum_{i=2}^{N} \hat{u}_i \hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i^2},$$

missä $\hat{u}_i = Y_i - X_i \hat{\beta}_{OLS}$. Oletetaan tunnetuksi, että nollahypoteesin vallitessa

$$\hat{\rho}(1) \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

kun $N \to \infty$. Olkoon Durbin-Watson testisuure

$$D = \frac{\sum_{i=2}^{N} (\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i^2}.$$

Perustele, että

$$D \xrightarrow{d} N(2, 4),$$

kun $N \to \infty$, nollahypoteesin vallitessa.

4. Olkoot $\mathcal{Y} = (Y_1, \ldots, Y_N)'$ $N \times 1$-vektori, $\mathcal{X}$ $N \times K$-matriisi jonka riveinä ovat $1 \times K$ vektorit X_i, $\mathcal{Z}$ $N \times L$-matriisi jonka riveinä ovat $1 \times L$ vektorit Z_i ja β $K \times 1$-vektori. Olkoon

$$g_N(\beta) = \mathcal{Z}'\mathcal{Y} - \mathcal{Z}'\mathcal{X}\beta.$$

Olkoon

$$\hat{\beta}_{GMM} = \mathrm{argmin}_{\beta \in \mathbf{R}^K} g_N(\beta)' W g_N(\beta),$$

missä W on $L \times L$ matriisi. Osoita, että

$$\hat{\beta}_{GMM} = \left[\mathcal{X}'\mathcal{Z}W\mathcal{Z}'\mathcal{X}\right]^{-1} \mathcal{X}'\mathcal{Z}W\mathcal{Z}'\mathcal{Y}.$$

Ohje: Ratkaise yhtälö

$$\frac{\partial}{\partial \beta} g_N(\beta)' W g_N(\beta) = 0$$

käyttämällä laskusääntöjä

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \beta' c = c, \qquad \frac{\partial}{\partial \beta} \beta' C \beta = 2C\beta,$$

missä c on $K \times 1$-vektori ja C on $K \times K$-matriisi.

2 Tietokonetehtäviä

Tutkitaan aineistoa, jossa on kaksi muuttujaa:

- RealGDP: Quarterly values of Real GDP for the United States in Billions of Chained (2000) Dollars Seasonally Adjusted, Annual Rate.
- TBillRate: Quarterly values of the rate on 3-month Treasury Bills. Quaterterly averages of daily rates in percentage points at an annual rate.

Aineiston voi lukea R:ään komennoilla

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/econometrics/USMacro_Quarterly.csv"
data<-read.table(file,skip=1,sep=",")
```

Aineiston voi lukea SAS:iin komennoilla

```
FILENAME myurl URL 'http://cc.oulu.fi/~jklemela/econometrics/USMacro_Quarterly.txt'
DATA USmacro;
   INFILE myurl firstobs=2;
   INPUT time $ gdpq tbill;
RUN;
```

5. Olkoon

$$Y_t = \log(\mathrm{RealGDP}_t) - \log(\mathrm{RealGDP}_{t-1})$$

ja

$$X_{t,1} = \mathrm{TbillRate}_t - \mathrm{TbillRate}_{t-1},$$

$t = 1, \ldots, T$. Laske mallin

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t-1,1} + u_t$$

asymptoottinen Newey-West heteroskedastisuus- ja autokorrelaatiorobusti kovarianssimatriisi. Tämän kovariansimatriisin kaava on

$$\frac{1}{T}\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}^{-1},$$

missä

$$\hat{A} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t' X_t,$$

$X_t = (1, X_{t-1,1})$,

$$\hat{B} = \hat{\Gamma}(0) + \sum_{j=1}^{T-1} w(j)[\hat{\Gamma}(j) + \hat{\Gamma}(j)'],$$

missä

$$\hat{\Gamma}(j) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T-j} \hat{u}_i \hat{u}_{i+j} X_i' X_{i+j},$$

$$\hat{u}_i = Y_i - X_i \hat{\beta}_{OLS}$$

ja

$$w(j) = \max\left\{0, 1 - \frac{j}{L+1}\right\},$$

missä $0 \leq L \leq N - 1$. Huomaa, että voidaan myös kirjoittaa

$$\hat{B} = \frac{1}{T}\mathcal{X}'\hat{\Omega}\mathcal{X} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{l=1}^{T}\hat{\Omega}_{tl} X_t' X_l,$$

missä $\mathcal{X}$ on $T \times K$-matriisi jonka riveinä ovat x_t ja $\hat{\Omega}$ on $T \times T$ matriisi, jonka alkioina ovat

$$\hat{\Omega}_{tl} = w(|t-l|)\hat{u}_t \hat{u}_l.$$

Edellä merkittiin

$$\hat{\beta}_{OLS} = \left(\sum_{t=1}^{T} X_t' X_t \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} X_t' Y_t \right).$$

Ohje: Voit käyttää R:n pakettia "sandwich", jossa on funktiot "vcovHAC" ja "NeweyWest".

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Olkoon

$$Y = \beta_0 + X\beta + \gamma q + v,$$

missä Y, q ja v ovat skalaarisatunnaismuuttujia, X on $1 \times K$ satunnaisvektori, $\beta_0, \gamma \in \mathbf{R}$ ja β on $K \times 1$ vektori. Olkoon

$$E(v \mid X, q) = 0.$$

Oletetaan, että q on muuttuja, jota ei havaita. Oletetaan, että havaitaan kaksi indikaattoria q_1 ja q_2, joille pätee

$$E(Y \mid X, q, q_1) = E(Y \mid X, q), \qquad E(Y \mid X, q, q_2) = E(Y \mid X, q)$$

ja

$$q_1 = q + a_1, \qquad q_2 = q + a_2,$$

missä $\mathrm{Cov}(q, a_1) = 0$, $\mathrm{Cov}(q, a_2) = 0$, $\mathrm{Cov}(X_j, a_1) = 0$, $\mathrm{Cov}(X_j, a_2) = 0$, $j = 1, \ldots, K$ ja $\mathrm{Cov}(a_1, a_2) = 0$. Selitä kuinka kerroin γ voidaan estimoida.

2. Olkoon

$$Y = X\beta + u,$$

missä Y ja u ovat skalaarisatunnaismuuttujia, X on $1 \times K$ satunnaisvektori ja β on $K \times 1$ vektori. Olkoon (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, N$, havainnot (X, Y):n jakaumasta.

Tarkastellaan matriisia

$$V = A^{-1} B A^{-1},$$

missä

$$A = EX'X,$$

$$B = \Gamma(0) + \sum_{j=1}^{\infty} [\Gamma(j) + \Gamma(j)'],$$

missä

$$\Gamma(j) = E\left(u_i u_{i+j} X_i' X_{i+j}\right).$$

Miten matriisi V voidaan estimoida?

3. Olkoon
$$Y = X\beta + u,$$
missä Y ja u ovat reaaliarvoisia satunnaismuuttujia, X on $1 \times K$-satunnaisvektori ja β on $K \times 1$-vektori. Olkoon Z instrumenttimuuttujien satunnaisvektori, jonka dimensio on $1 \times L$, missä $L \geq K$. Oletetaan, että $E(Z'u) = 0$ ja $\operatorname{rank}(EZ'X) = K$. Olkoot (X_i, Y_i, Z_i), $i = 1, \ldots, N$, i.i.d. havainnot (X, Y, Z):n jakaumasta. GMM-estimaattori on
$$\hat{\beta}_{GMM} = \left(A_N W_n A_N'\right)^{-1} A_N W_N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Z_i' Y_i,$$
missä
$$A_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i' Z_i$$
ja W_N on $L \times L$ satunnaismatriisi, jolle pätee
$$W_N \xrightarrow{p} W$$
kun $N \to \infty$, missä $\operatorname{rank}(W) = L$.

   (a) Osoita, että
   $$\sqrt{N}\left(\hat{\beta}_{GMM} - \beta\right) = \left(A_N W_N A_N\right)^{-1} A_N W_N N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} Z_i' u_i.$$

   (b) Osoita, että
   $$\sqrt{N}\left(\hat{\beta}_{GMM} - \beta\right) \xrightarrow{d} N(0, V)$$
   kun $N \to \infty$, missä
   $$V = \left(AWA'\right)^{-1} AWCWA' \left(AWA'\right)^{-1},$$
   $$A = EX'Z, \qquad C = \operatorname{Var}(Z'u) = E(u^2 Z'Z).$$