Markkinariskin analyysi
Laskuharjoitus 3

2014, syyskuu 23

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon L Bernoulli-satunnaismuuttuja joka saa arvot 0 ja 1 todennäköisyyksillä $P(L = 0) = 0.95$ ja $P(L = 1) = 0.05$. Olkoot L_1 ja L_2 riippumattomia ja samoin jakautuneita siten, että $L_1 \sim L_2 \sim L$.

   (a) Mille arvoille α pätee, että $q_\alpha(L_1 + L_2) > q_\alpha(L_1) + q_\alpha(L_2)$?

   (b) Totea, että $\mathrm{ES}_\alpha(L_1 + L_2) \leq \mathrm{ES}_\alpha(L_1) + \mathrm{ES}_\alpha(L_2)$ kaikille $\alpha \in (0, 1)$.

   Ohje: Käytä hyväksesi laskuharjoituksen 2 tehtäviä 3 ja 4.

2. Olkoot $L_1, \ldots, L_n \in \mathbf{R}$ havaintoja yksiulotteisesta jakaumasta. Määritellään empiirinen kvantiilifunktio seuraavilla askelilla.

   (a) Järjestetään otos suurimmasta pienimpään $L_{1,n} \geq \cdots \geq L_{n,n}$.

   (b) Olkoon $m = \lceil (1 - \alpha)n \rceil$.

   (c) $\hat{q}_\alpha = L_{m,n}$.

   Olkoon $n = 4$ ja $L_1 = -1$, $L_2 = 1$, $L_3 = 2$, $L_4 = 3$. Piirrä funktion q_α kuvaaja, $\alpha \in (0, 1)$.

3. Olkoon $U \sim \mathrm{Uniform}[0, 1]$. Olkoon $F_L(x) = P(L \leq x)$ satunnaismuuttujan L kertymäfunktio ja olkoon F_L jatkuva. Osoita, että satunnaismuuttujan L ja satunnaismuuttujan $F_L^{-1}(U)$ jakauma on sama: $L \sim F_L^{-1}(U)$. Ohje: Osoita, että satunnaismuuttujan L kertymäfunktio on sama kuin satunnaismuuttujan $F_L^{-1}(U)$ kertymäfunktio.

4. Tarkastellaan USD nollakuponkivelkakirjaa eurooppalaisen sijoittajan kannalta. Olkoon velkakirjan arvo hetkellä t

$$V_t = p^f(t\Delta, T),$$

missä T on velkakirjan maksupäivä ja Δ on diskretointiaskel. Valitaan riskitekijöiksi $Z_t = (Z_{t,1}, Z_{t,2})$, missä

$$Z_{t,1} = \log e_t, \qquad Z_{t,2} = y^f(t\Delta, T),$$

kun e_t on USD/Euro vaihtokurssi hetkellä t ja

$$y^f(t\Delta, T) = -\frac{1}{T - t\Delta} \log p^f(t\Delta, T).$$

Osoita, että linearisoitu tappio on

$$L_{t+1}^{\Delta} = -V_t \left[\Delta Z_{t,2} + X_{t+1,1} - (T - t\Delta)X_{t+1,2}\right],$$

missä $X_{t+1,i} = Z_{t+1,i} - Z_{t,i}$, $i = 1, 2$.

Ohje: merkitse $f(t, Z_t) = V_t$ ja osoita ensin, että $f(t, Z_t) = \exp\{Z_{t,1} - (T - t\Delta)Z_{t,2}\}$.

2 Tietokonetehtäviä

Tutkitaan aikasarjaa S&P 500 osakeindeksin päivittäisistä päätöskursseista ajalta 1950-01-03 – 2014-08-28. Lue data R:ään komennoilla

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/marketrisk/sp500.csv"
data<-read.csv(file=file)
sp500<-data[,7]
sp500<-sp500[length(sp500):1]
plot(sp500,type="l")
```

Muunna hintojen aikasarja tuotoiksi

```
pituus<-length(sp500)
tuotto<-log(sp500[2:pituus])-log(sp500[1:(pituus-1)])
plot(tuotto,type="l")
```

5. (a) Oletetaan, että portfolio koostuu 10 kappaleesta S&P 500 indeksiosuutta. Oletetaan, että eletään päivää 2014-08-28, jolloin yhden indeksiosuuden arvo on 1996.74 USD. Laske portfoliolle VaR_α ja ES_α yhden päivän horisontilla kun $\alpha = 0.95$ ja $\alpha = 0.99$, käyttäen historiallisen simulaation menetelmää (eli empiirisiä kvantiileja).

(b) Estimoi VaR_α ja ES_α edellisen tehtävän portfoliolle kun $\alpha = 0.95$ ja $\alpha = 0.99$, kättäen oletusta, että tuotot ovat normaalisti jakautuneita jakaumalla $N(\mu, \sigma^2)$, eli käytä kaavoja

$$\mathrm{VaR}_\alpha = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

ja

$$\mathrm{ES}_\alpha = \mu + \sigma\,\frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}\,,$$

missä Φ ja ϕ ovat standardin normaalijakauman kertymäfunktion ja tiheysfunktio.

3 Kertauskysymyksiä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Oletetaan, että reaaliarvoinen satunnasmuuttuja L noudattaa normaalijakaumaa $N(\mu, \sigma^2)$. Osoita, että

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha),$$

missä Φ on standardin normaalijakauman kertymäfunktio.

2. Olkoon $L_1, \ldots, L_n$ otos satunnaismuuttujan L jakaumasta. Määrittele empiirisiin kvantiileihin perustuva estimaattori vaarassa olevalle arvolle (value at risk) $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$.

3. Olkoon portfoliossa 10 kappaletta saman yrityksen osaketta hetkellä t. Olkoot käytettävissä $n+1$ kappaletta päivittäisiä osakkeen päätöskursseja $S_{t-n}, \ldots, S_t$. Selitä, miten portfolion VaR_α yhden päivän horisontilla voidaan estimoida historiallisen simulaation menetelmällä.

4. Olkoon L satunnaismuuttuja, jonka arvo on arvopaperisalkun tappio hetkellä $t+1$. Määrittele odotettu vaje $\mathrm{ES}_\alpha(L)$ (expected shortfall) luottamustasolla $0 < \alpha < 1$.

5. Olkoon $L_1, \ldots, L_n$ otos satunnaismuuttujan L jakaumasta. Määrittele empiirisiin kvantiileihin perustuva estimaattori odotetulle vajeelle (expected shortfall) $\mathrm{ES}_\alpha(L)$.

6. Olkoon L satunnaismuuttuja (portfolion tappio). Odotettu vaje on määritelty kaavalla

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_x(L)\,dx.$$

Osoita, että kun F_L on jatkuva, niin

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} E\left[L I_{[\mathrm{VaR}_\alpha(L),\infty)}(L) \right],$$

missä $I_A(L) = 1$ kun $L \in A$ ja $I_A(L) = 0$ kun $L \notin A$. Ohje: L voidaan korvata satunnaismuuttujalla $F_L^{-1}(U)$, missä $U \sim \text{Uniform}[0,1]$ (U on tasaisesti jakautunut välillä $[0,1]$) ja $F_L(x) = P(L \leq x)$ on L:n kertymäfunktio.

7. Oletetaan, että reaaliarvoinen satunnasmuuttuja L noudattaa normaalijakaumaa $N(\mu, \sigma^2)$. Osoita, että

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma \mathrm{ES}_\alpha(Z),$$

missä $Z \sim N(0,1)$.