Markkinariskin analyysi
Laskuharjoitus 4

2014, syyskuu 30

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon $X \in \mathbf{R}^d$ satunnaisvektori. Määritellään kovarianssimatriisi kaavalla
$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - EX)(X - EX)'].$$
Huomaa, että joskus merkitään $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X)$. Oletetaan jatkossa, että $EX = 0$. Olkoon B $d \times d$-matriisi. Osoita, että
$$\mathrm{Var}(BX) = B\mathrm{Var}(X)B'.$$

2. Olkoon $X \in \mathbf{R}^d$ satunnaisvektori. Oletetaan, että $EX = 0$ ja merkitään $\mathrm{Var}(X) = \Sigma$. Olkoot $X_1, \dots, X_h$ i.i.d. satunnaisvektoreita joiden jakauma on sama kuin satunnaisvektorin X jakauma. Osoita, että
$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{h} X_i\right) = h\Sigma.$$

3. Noudattakoot X_1 ja X_2 normaaleja varianssisekoitusjakaumia siten että $X_1 = \mu_1 + \sqrt{W}AZ_1$ ja $X_2 = \mu_1 + \sqrt{W}AZ_2$, missä Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomia, $Z_1 \sim N_d(0, I_d)$ ja $Z_2 \sim N_d(0, I_d)$. Osoita, että
$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0_{d\times d},$$
missä
$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E[(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)'].$$

4. Oletetaan, että $X \in \mathbf{R}^d$ noudattaa normaalia keskiarvo-varianssi-sekoitusjakaumaa (normal mean-variance mixture). Tällöin

$$X = m(W) + \sqrt{W} A Z,$$

missä $Z \sim N_k(0, I_k)$, $W \geq 0$, W on riippumaton Z:sta ja A on $d \times k$-matriisi. Olkoon

$$m(W) = \mu + W\gamma,$$

missä $\mu, \gamma \in \mathbf{R}^d$. Osoita, että

$$\mathrm{Var}(X) = E(W)\,\Sigma + \mathrm{Var}(W)\,\gamma\gamma',$$

missä $\Sigma = AA'$.

2 Tietokonetehtäviä

Tutkitaan aikasarjaa S&P 500 osakeindeksin päivittäisistä päätöskursseista ajalta 1950-01-03 – 2014-08-28. Lue data R:ään ja muunna hintojen aikasarja tuotoiksi.

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/marketrisk/sp500.csv"
data<-read.csv(file=file)
sp500<-data[,7]
sp500<-sp500[length(sp500):1]
plot(sp500,type="l")

pituus<-length(sp500)
tuotto<-log(sp500[2:pituus])-log(sp500[1:(pituus-1)])
plot(tuotto,type="l")
```

5. (a) Oletetaan, että portfolio koostuu 10 kappaleesta S&P 500 indeksiosuutta. Oletetaan, että eletään päivää 2014-08-28, jolloin yhden indeksiosuuden arvo on 1996.74 USD.

   Vertaile historiallisen datan perusteella onko empiiriseen kvantiiliin perustuva VaR_α:n estimaattori vai normaalijakaumaan perustuva VaR_α:n estimaattori parempi (backtesting). Käytä yhden päivän horisonttia ja arvoja $\alpha = 0.95$ tai $\alpha = 0.99$. Backtesting kaava on

$$\frac{1}{T - t_0} \sum_{t=t_0}^{T-1} I_{(\hat{q}_{\alpha,t},\infty)}(l_{[t]}(X_{t+1})),$$

   jonka pitää olla lähellä arvoa $1 - \alpha$, missä $\hat{q}_{\alpha,t} = \widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha,t}$.

(b) Oletetaan, että portfolio koostuu 10 kappaleesta S&P 500 indeksiosuutta. Oletetaan, että eletään päivää 2014-08-28, jolloin yhden indeksiosuuden arvo on 1996.74 USD.

Vertaile historiallisen datan perusteella onko empiiriseen kvantiiliin perustuva ES_α:n estimaattori vai normaalijakaumaan perustuva ES_α:n estimaattori parempi (backtesting). Käytä yhden päivän horisonttia ja arvoja $\alpha = 0.95$ tai $\alpha = 0.99$. Backtesting kaava on

$$\sum_{t=t_0}^{T-1} I_{(\hat{q}_{\alpha,t},\infty)}(l_{[t]}(X_{t+1})) \left| l_{[t]}(X_{t+1}) - \widehat{\mathrm{ES}}_{\alpha,t} \right|,$$

jonka pitää olla lähellä arvoa 0, missä $\hat{q}_{\alpha,t} = \widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha,t}$.

3 Kertauskysymyksiä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Olkoon

$$L_{t+h}^{(h)} = -(V_{t+h} - V_t),$$

missä V_t on portfolion arvo hetkellä t ja $h = 1, 2, \ldots$. Merkitään

$$L_{t+h}^{(h)} = l_{[t]}\left(\sum_{i=1}^{h} X_{t+i}\right),$$

missä $X_{t+1}, \ldots, X_{t+h} \in \mathbf{R}^d$ ovat satunnaisvektoreita ja $l_{[t]} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$. Oletetaan, että

$$l_{[t]}(x) = b_t' x, \qquad x \in \mathbf{R}^d,$$

missä $b_t \in \mathbf{R}^d$ on vektori. Oletetaan, että $X_{t+1}, \ldots, X_{t+h}$ ovat i.i.d. satunnaismuuttujia ja $X_{t+i} \sim N(0, \Sigma)$. Osoita, että

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_{t+h}^{(h)}) = \sqrt{h}\,\mathrm{VaR}_\alpha(L_{t+1}^{(1)}).$$

2. Olkoon satunnaismuuttujan L jakauma jatkuva. Osoita, että

$$E\left[(L - \mathrm{ES}_\alpha)\, I_{[\mathrm{VaR}_\alpha,\infty)}(L)\right] = 0,$$

missä ES_α on satunnaismuuttujan L odotettu vaje luottamustasolla α (expected shortfall) ja VaR_α on satunnaismuuttujan L vaarassa oleva arvo luottamustasolla α (value-at-risk), sekä merkitään $I_A(x) = 1$ jos $x \in A$ ja $I_A(x) = 0$ jos $x \notin A$.

3. Määrittele mitä tarkoittaa, että satunnaisevektori $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ noudattaa normaalia varianssisekoitusjakaumaa (normal variance mixture distribution).

4. Oletetaan, että satunnaisevektori $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ noudattaa normaalia varianssisekoitusjakaumaa (normal variance mixture distribution) $M_d(\mu, \sigma, H)$. Osoita, että $EX = \mu$.