Markkinariskin analyysi
Laskuharjoitus 5

2014, lokakuu 7

1 Laskutehtäviä

1. Laske kuinka monta parametria tarvitaan määrittelemään d-ulotteinen normaalijakauma $N(\mu, \Sigma)$, missä μ on d-vektori ja Σ on $d \times d$-kovarianssimatriisi.

2. Olkoon $X = (X_1, X_2)$ ja $\Delta = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$, missä $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(X_i)$. Osoita, että
$$\mathrm{Cov}(X) = \Delta \mathrm{Cor}(X) \Delta.$$

3. Olkoon $\{X_t\}$ kovarianssistationaarinen prosessi, jolloin
   - $EX_t = \mu$ kaikille $t \in \mathbf{Z}$, missä $\mu \in \mathbf{R}$ on vakio,
   - $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_{s+h})$ kaikille $t, s, h \in \mathbf{Z}$.

   (a) Osoita, että $\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2$ kaikille $t \in \mathbf{Z}$, missä $\sigma^2 > 0$ on vakio.

   (b) Merkitään $\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_0, X_h)$. Osoita, että
$$\mathrm{Cor}(X_0, X_h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

4. Oletetaan, että $\{X_t\}$ noudattaa GARCH$(1,1)$-prosessia. Tällöin $X_t = \sigma_t Z_t$, missä $\{Z_t\} \sim \mathrm{IID}(0,1)$ ja
$$\sigma_t^2 = \alpha_o + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

   (a) Totea, että
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 \sum_{i=0}^{k-1} \beta^i + \alpha_1 \sum_{j=1}^{k} \beta^{j-1} X_{t-j}^2 + \beta^k \sigma_{t-k}^2$$
   kaikille $k \geq 1$.

(b) Perustele, että heikosti stationaarisessa tapauksessa

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\beta} + \alpha_1 \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} X_{t-j}^2.$$

2 Tietokonetehtäviä

Tutkitaan aikasarjaa S&P 500 osakeindeksin päivittäisistä päätöskursseista ajalta 1950-01-03 – 2014-08-28. Lue data R:ään ja muunna hintojen aikasarja tuotoiksi.

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/marketrisk/sp500.csv"
data<-read.csv(file=file)
sp500<-data[,7]
sp500<-sp500[length(sp500):1]
plot(sp500,type="l")

pituus<-length(sp500)
tuotto<-log(sp500[2:pituus])-log(sp500[1:(pituus-1)])
plot(tuotto,type="l")
```

5. Tutki S&P 500 indeksin tuottojen tyyliteltyjä ominaisuuksia.

   (a) Laske autokorrelaatiofunktio tuottojen aikasarjalle.

   (b) Laske autokorrelaatiofunktio tuottojen itseisarvon aikasarjalle.

   (c) Tulosta tuottojen aikasarja

      i. Vertaa tuottojen aikasarjaa simuloituun i.i.d. dataan normaalijakaumasta.

      ii. Vertaa tuottojen aikasarjaa simuloituun i.i.d. dataan t-jakaumasta vapausastein 4.
      Aseta odotusarvo ja keskihajonta simuloidulle datalle samaksi kuin tuottojen aikasarjasta laskettu otoskeskiarvo ja otoskeskihajonta.

      iii. Simuloi GARCH(1,1)-mallia $X_t = \sigma_t Z_t$, $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$. Voit asettaa

```
alpha0<-7.229773e-07
alpha1<-7.721598e-02
beta<-9.170395e-01
```

jolloin parametrit ovat estimoitu S&P 500 indeksin tuottojen jakaumasta.
Kokeile arvoja $0 < \alpha_1 + \beta < 1$ ja $\alpha_1 + \beta \geq 1$ jollekin $\alpha_0 > 0$.
Vertaa tapauksia $Z_t \sim N(0,1)$. ja $Z_t \sim \sqrt{(\nu-2)/\nu}\, t_\nu$, missä $\nu = 4$.

3 Kertauskysymyksiä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Oletetaan, että $X \in \mathbf{R}^d$ noudattaa normaalia keskiarvo-varianssi-sekoitusjakaumaa (normal mean-variance mixture). Tällöin

   $$X = \mu + \sqrt{W} A Z,$$

   missä $\mu \in \mathbf{R}^d$, $Z \sim N_k(0, I_k)$, $W \geq 0$, W on riippumaton Z:sta ja A on $d \times k$-matriisi. Osoita, että

   $$\mathrm{Cov}(X) = E(W)\, \Sigma,$$

   missä $\Sigma = AA'$.

2. Määrittele mitä tarkoittaa, että satunnaisevektori $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ toteuttaa p:n tekijän mallin (p-factor model).

3. Määrittele, mitä tarkoitetaan GARCH(p, q) mallilla.