

Markkinariskin analyysi

Laskuharjoitus 6

2014, lokakuu 14

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon $X_t = (X_{t,1}, X_{t,2})'$ kovarianssistationaarinen vektori aikasarja. Määritellään autokovarianssifunktio

$$\Gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_{t,1}, X_{t+h,1}) & \text{Cov}(X_{t,1}, X_{t+h,2}) \\ \text{Cov}(X_{t,2}, X_{t+h,1}) & \text{Cov}(X_{t,2}, X_{t+h,2}) \end{bmatrix},$$

missä $t, h \in \mathbf{Z}$. Osoita, että

$$\Gamma(h) = \Gamma(-h)'$$

Ohje: Väite seuraa koska

$$\text{Cov}(X_{t,1}, X_{s,2}) = \text{Cov}(X_{s,2}, X_{t,1})$$

kaikille $s, t \in \mathbf{Z}$ kovarianssin määritelmän perusteella ja

$$\text{Cov}(X_{t,1}, X_{s,2}) = \text{Cov}(X_{t+h,1}, X_{s+h,2})$$

kaikille $s, t, h \in \mathbf{Z}$ kovarianssistationaarisuuden perusteella.

2. Olkoon X reaaliarvoinen satunnaismuuttuja ja merkitään kertymäfunktioita $F_X = P(X \leq x)$. Osoita, että $F_X(X)$ noudattaa tasaista jakaumaa: $F_X(X) \sim \text{Unif}([0, 1])$.
3. Olkoot $Y_1, \dots, Y_n \in \mathbf{R}$ havaintoja yksiulotteisesta jakaumasta. Määritellään empiirinen kertymäfunktio $\hat{F} : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ kaavalla

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(Y_i).$$

Osoita, että

$$\hat{F}(Y_i) = \frac{1}{n} \text{rank}(Y_i),$$

$i = 1, \dots, n$.

4. Kertymäfunktion $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ kopula on

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)),$$

missä $F_i : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, 2$, ovat F :n marginaalikertymäfunktioita. Osoita, että kopulan C tiheysfunktio on määritelty kaavalla

$$c(u_1, u_2) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \cdot f_2(F_2^{-1}(u_2))},$$

missä f on kertymäfunktiota F vastaava tiheysfunktio ja f_i on kertymäfunktiota F_i vastaava tiheysfunktio, $i = 1, 2$.

2 Tietokonetehtäviä

Tutkitaan aikasarjaa S&P 500 osakeindeksin päivittäisistä päätöskursseista. Lue data R:ään ja muunna hintojen aikasarja tuotoiksi.

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/marketrisk/sp500.csv"
data<-read.csv(file=file)
sp500<-data[,7]
sp500<-sp500[length(sp500):1]
plot(sp500, type="l")
```

```
pituus<-length(sp500)
tuotto<-log(sp500[2:pituus])-log(sp500[1:(pituus-1)])
plot(tuotto, type="l")
```

5. Oletetaan, että portfolio koostuu 10 kappaleesta S&P 500 indeksiosuutta. Oletetaan, että eletään päivää 2014-08-28, jolloin yhden indeksiosuuden arvo on 1996.74 USD. Estimoi ehdollinen VaR_α portfoliolle yhden päivän horisontilla kun $\alpha = 0.95$ ja $\alpha = 0.99$, käyttäen GARCH(1, 1) mallia.

3 Kertauskysymyksiä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Tarkastellaan osakeportfolion tappiota

$$L_{t+1} = l_{[t]}(X_{t+1}) = - \sum_{i=1}^d \lambda_i S_{t,i} X_{t+1,i},$$

missä X_{t+1} on satunnaisvektori, jonka elementteinä ovat portfoliossa olevien osakkeiden tuotot. Oletetaan, että käytettävissä on havainnot X_{t-n+1}, \dots, X_t historiallisista tuotoista. Selitä miten GARCH(1, 1) mallin avulla voidaan estimoida $\text{VaR}_\alpha(L_{t+1} | \mathcal{F}_t)$ (conditional value-at-risk).

2. (a) Määrittele kopula sanallisesti.
(b) Olkoon $F : \mathbf{R}^d \rightarrow [0, 1]$ kertymäfunktio, jolla on jatkuvat marginaalikertymäfunktiot $F_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, d$. Mikä on F :n kopula?
(c) Olkoon $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ kopula ja $F_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, d$, yksiuolotteisia kertymäfunktioita. Konstruoi näiden avulla kertymäfunktio $F : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$, jolla on marginaalit F_i , $i = 1, \dots, n$.