Markkinariskin analyysi
Laskuharjoitus 7

2014, lokakuu 21

1 Laskutehtäviä

1. (a) Olkoon $F : \mathbf{R}^d \to [0,1]$ kertymäfunktio, jolla on jatkuvat marginaalit $F_i : \mathbf{R} \to [0,1]$, $i = 1, \ldots, d$. Määritellään funktio $\tilde{C} : \mathbf{R}^d \to [0,1]$ kaavalla

$$\tilde{C}(x_1, \ldots, x_d) = F\left(F_1^{-1}(\Phi(x_1)), \ldots, F_d^{-1}(\Phi(x_d))\right),$$

missä $\Phi : \mathbf{R} \to [0,1]$ on $N(0,1)$-jakauman kertymäfunktio. Osoita, että $\tilde{C}$ on kertymäfunktio, jonka marginaalit noudattavat jakaumaa $N(0,1)$.

(b) Olkoon $\tilde{C} : \mathbf{R}^d \to [0,1]$ kertymäfunktio, jonka marginaalit noudattavat jakaumaa $N(0,1)$. Olkoot $F_i : \mathbf{R} \to [0,1]$, $i = 1, \ldots, d$, jatkuvia kertymäfunktioita. Osoita, että

$$F(x_1, \ldots, x_d) = \tilde{C}\left(\Phi^{-1}(F_1(x_1)), \ldots, \Phi^{-1}(F_d(x_d))\right)$$

on kertymäfunktio, jonka marginaalit ovat F_i, $i = 1, \ldots, d$.

2. Olkoon $X_{1,1}, \ldots, X_{1,n}$ otos X_1:n jakaumasta ja $X_{2,1}, \ldots, X_{2,n}$ otos X_2:n jakaumasta. Havainnon $X_{i,k}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2$, järjestysluku $\mathrm{rank}(X_{i,k})$ on niitten havaintojen lukumäärä muuttujasta k, jotka ovat pienempiä tai yhtäsuuria kuin havainto $X_{i,k}$:

$$\mathrm{rank}(X_{k,i}) = \#\{X_{k,j} : X_{k,j} \le X_{k,i}, j = 1, \ldots, n\}.$$

Käytetään merkintää

$$r_k(i) = \mathrm{rank}(X_{k,i}).$$

Estimaattori Spearmannin järjestyskorrelaatiolle voidaan määritellä järjestyslukujen lineaarisena korrelaatiokertoimena:

$$\hat{\rho}_S = \frac{\sum_{i=1}^n (r_1(i) - \bar{r}_1)(r_2(i) - \bar{r}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (r_1(i) - \bar{r}_1)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (r_2(i) - \bar{r}_2)^2}},$$

missä $\bar{r}_k = n^{-1} \sum_{i=1}^n r_k(i)$, $k = 1, 2$. Osoita, että

$$\hat{\rho}_S = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^n \left(r_1(i) - \frac{1}{2}(n+1) \right) \left(r_2(i) - \frac{1}{2}(n+1) \right).$$

Ohje: Voit käyttää kaavoja $\sum_{i=1}^n i = (n+1)n/2$ ja $\sum_{i=1}^n i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

3. Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. otos eksponenttijakaumasta, jonka kertymäfunktio on

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x}, \qquad x \geq 0,$$

missä $\beta > 0$. Merkitään $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Osoita, että

$$P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x \right) \longrightarrow \exp\{-e^{-x}\},$$

kun $n \to \infty$, missä $c_n = 1/\beta$ ja $d_n = \beta^{-1} \log n$. Ohje: käytä ominaisuutta $\lim_{n\to\infty}(1 - n^{-1}x)^n = e^{-x}$.

4. Määritellään Pareto-jakauman tiheysfunktio kaavalla

$$f(x) = \frac{\alpha c^\alpha}{x^{\alpha+1}} I_{(c,\infty)}(x),$$

missä $c > 0$ oletetaan tunnetuksi parametriksi ja $\alpha > 0$ on tuntematon paramteri. Oletetaan, että on käytettävissä otos $X_1, \ldots, X_n$ riippumattomia havaintoja Pareto-jakaumasta. Osoita, että

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(X_i/c)}$$

on suurimman uskottavuuden estimaattori parametrille α.

2 Tietokonetehtäviä

Tutkitaan aikasarjaa S&P 500 ja Nasdaq-100 osakeindeksien päivittäisistä päätöskursseista ajalta 1985-10-01 – 2014-10-09. Lue data R:ään ja muunna hintojen aikasarjat tuottojen aikasarjoiksi.

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/marketrisk/sp500-ndx100.txt"
data<-read.table(file=file,header=TRUE)
sp500<-data[,1]
ndx100<-data[,2]

pituus<-length(sp500)
tuotto.sp500<-log(sp500[2:pituus])-log(sp500[1:(pituus-1)])
plot(tuotto.sp500,type="l")

tuotto.ndx100<-log(ndx100[2:pituus])-log(ndx100[1:(pituus-1)])
plot(tuotto.ndx100,type="l")
```

5. Oletetaan, että portfolio koostuu 10 kappaleesta S&P 500 indeksiosuutta ja 5 kappaleesta Nasdaq-100 indeksiosuutta. Oletetaan, että eletään päivää 2014-10-09 jolloin S&P 500 indeksiosuuden arvo on 1928.21 USD ja Nasdaq-100 indeksiosuuden arvo on 3969.32 USD. Estimoi VaR_α portfoliolle yhden päivän horisontilla kun $\alpha = 0.95$ käyttäen normaalijakauma-oletusta.

   (a) Käytä yksiulotteista menetelmää. Olkoon t =2014-10-09. Laske
   $$\tilde{L}_{t-i+1} = l_{[t]}(X_{t-i+1}), \qquad i = 1, \ldots, n,$$
   missä $X_t = (X_{t,1}, X_{t,2})$, $X_{t,1}$ on S&P 500 indeksin tuotto, $X_{t,2}$ on Nasdaq-100 indeksin tuotto,
   $$l_{[t]}(x_1, x_2) = -\lambda_1 S_{t,1} x_1 - \lambda_2 S_{t,2} x_2,$$
   missä $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, $S_{t,1}$ on S&P 500 indeksin arvo ja $S_{t,2}$ on Nasdaq-100 indeksin arvo päivän t lopussa. Olkoon $\hat{\mu}$ otoskeskiarvo ja $\hat{\sigma}$ otoskeskihajonta havainnoista $\tilde{L}_{t-i+1}$, $i = 1, \ldots, n$. Laske
   $$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha = \hat{\mu} + \hat{\sigma}\Phi^{-1}(\alpha).$$

   (b) Käytä moniulotteista menetelmää. Estimoi jakauman $N_2(\mu, \Sigma)$ parametrit otoksen $X_{t-i+1} = (X_{t-i+1,1}, X_{t-i+1,2})$, $i = 1, \ldots, n$, perusteella. Laske
   $$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha = b'\hat{\mu} + \sqrt{b'\hat{\Sigma}b} \cdot \Phi^{-1}(\alpha),$$
   missä
   $$b = (-\lambda_1 S_{t,1}, -\lambda_2 S_{t,2})'.$$

   (c) Tarkista, että tulos oli sama molemmissa menetelmissä. Pohdi menetelmien etuja ja haittoja sekä sitä, milloin yksiulotteinen ja moniulotteinen menetelmä tuottavat eri tuloksen.

3 Kertauskysymyksiä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Olkoon $X_1, \dots, X_n \in \mathbf{R}^d$ otos kertymäfunktion $F : \mathbf{R}^d \to [0,1]$ jakaumasta. Selitä, miten saadaan muodostettua pseudo-otos kertymäfunktion F kopulasta.

2. Olkoot $X_1, \dots, X_n$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Merkitään $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Oletetaan, että

$$P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \le x\right) \longrightarrow H(x),$$

kaikille $x \in R$, kun $n \to \infty$, missä H on jatkuvan jakauman kertymäfunktio. Selitä miksi likimääräinen kaava

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X_1) \approx d_n + c_n H^{-1}(\alpha^n)$$

pätee ja miten tätä voidaan käyttää estimoimaan $\mathrm{VaR}_\alpha(X_1)$.

3. Olkoon $\mathrm{VaR}_\alpha(X) \ge u$, missä $X \in \mathbf{R}$ on satunnaismuuttuja, $u \in \mathbf{R}$ ja $\alpha \in (0,1)$. Osoita, että

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = u + F_u^{-1}\left(1 - \frac{1-\alpha}{P(X > u)}\right),$$

missä

$$F_u(x) = P(X - u \le x \mid X > u)$$

on jatkuva.