

Pitkittäis- ja paneeliaineistojen analysointi

Laskuharjoitus 5

2014, Huhtikuu 16

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 Y_{i,t-1} + u_{it},$$

$i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T$, missä

$$E(u_{it} | Y_{i,t-1}, \dots, Y_{i0}) = 0.$$

Merkitään $X_{it} = (1, Y_{i,t-1})$. Osoita, että POLS.3b pätee, eli

$$E(u_{it} u_{is} X_{it}' X_{is}) = 0,$$

kun $t, s = 1, \dots, T, t \neq s$.

2. Olkoon

$$Y_{it} = X_{it}' \beta + u_{it}, \quad t = 1, \dots, T,$$

missä $Y_{it}, u_{it} \in \mathbf{R}$, X_{it} on $1 \times K$ vektori ja β on $K \times 1$ vektori. Olkoon

$$E(u_{it} | X_{it}, u_{i,t-1}, X_{i,t-1}, \dots) = 0.$$

Osoita, että

- (a) $\Omega = E(u_i u_i')$ on diagonaalimatriisi, missä u_i on $T \times 1$ vektori ja $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{iT})'$.
- (b) Osoita, että $E(X_i' \Omega^{-1} u_i) = 0$, missä X_i on $T \times K$ matriisi, jonka rivit ovat X_{it} ja u_i on $T \times 1$ vektori, $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{iT})'$.

3. Käsitellään lineaarista mallia

$$Y_{it} = X_{it}\beta + v_{it},$$

missä

$$v_{it} = c_i + u_{it},$$

$i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T$. Oletus RE.1 sanoo, että

(a) $E(u_{it} | X_i, c_i) = 0, t = 1, \dots, T,$

(b) $E(c_i | X_i) = E(c_i) = 0,$

missä X_i on $T \times K$ matriisi, jonka rivit ovat X_{i1}, \dots, X_{iT} . Oletus SGLS.1 sanoo, että

$$E(X_i \otimes v_i) = 0,$$

missä $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{iT})'$ on $T \times 1$ -vektori. Osoita, että

$$\text{RE.1} \Rightarrow \text{SGLS.1}.$$

4. Käsitellään RE-mallia

$$Y_{it} = X_{it}\beta + v_{it},$$

missä

$$v_{it} = c_i + u_{it},$$

$i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T$. Oletukset RE.1 ja RE.3 sanovat, että

RE.1 (a) $E(u_{it} | X_i, c_i) = 0, t = 1, \dots, T,$

(b) $E(c_i | X_i) = E(c_i) = 0,$

RE.3 (a) $E(u_i u_i' | X_i, c_i) = \sigma_u^2 I_t,$

(a) $E(c_i^2 | X_i) = \sigma_c^2,$

missä X_i on $T \times K$ matriisi, jonka rivit ovat X_{i1}, \dots, X_{iT} ja u_i on $T \times 1$ -vektori, jonka elementit ovat u_{i1}, \dots, u_{iT} . Osoita, että

(a) $E v_{it}^2 = \sigma_c^2 + \sigma_u^2,$

(b) $E v_{it} v_{is} = \sigma_c^2, t \neq s.$

2 Tietokonetehtäviä

Tutkitaan aineistoa cornwell.raw, jossa on muuttujat

variable name	storage type	display format	value label	variable label
county	int	%9.0g		county identifier
year	byte	%9.0g		81 to 87
crmrte	float	%9.0g		crimes committed per person
prbarr	float	%9.0g		'probability' of arrest
prbconv	float	%9.0g		'probability' of conviction
prbpris	float	%9.0g		'probability' of prison sentenc
avgsen	float	%9.0g		avg. sentence, days
polpc	float	%9.0g		police per capita
density	float	%9.0g		people per sq. mile
taxpc	float	%9.0g		tax revenue per capita
west	byte	%9.0g		=1 if in western N.C.
central	byte	%9.0g		=1 if in central N.C.
urban	byte	%9.0g		=1 if in SMSA
pctmin80	float	%9.0g		perc. minority, 1980
wcon	float	%9.0g		weekly wage, construction
wtuc	float	%9.0g		wkly wge, trns, util, commun
wtrd	float	%9.0g		wkly wge, whlesle, retail trade
wfir	float	%9.0g		wkly wge, fin, ins, real est
wser	float	%9.0g		wkly wge, service industry
wmfg	float	%9.0g		wkly wge, manufacturing
wfed	float	%9.0g		wkly wge, fed employees
wsta	float	%9.0g		wkly wge, state employees
wloc	float	%9.0g		wkly wge, local gov emps
mix	float	%9.0g		offense mix: face-to-face/other
pctymle	float	%9.0g		percent young male
d82	byte	%9.0g		=1 if year == 82
d83	byte	%9.0g		=1 if year == 83
d84	byte	%9.0g		=1 if year == 84
d85	byte	%9.0g		=1 if year == 85
d86	byte	%9.0g		=1 if year == 86
d87	byte	%9.0g		=1 if year == 87
lcrmrte	float	%9.0g		log(crmrte)
lprbarr	float	%9.0g		log(prbarr)
lprbconv	float	%9.0g		log(prbconv)

lprbpris	float	%9.0g	log(prbpris)
lavgsen	float	%9.0g	log(avgsen)
lpolpc	float	%9.0g	log(polpc)
ldensity	float	%9.0g	log(density)
ltaxpc	float	%9.0g	log(taxpc)
lwcon	float	%9.0g	log(wcon)
lwtuc	float	%9.0g	log(wtuc)
lwtrd	float	%9.0g	log(wtrd)
lwfir	float	%9.0g	log(wfir)
lwser	float	%9.0g	log(wser)
lwmfg	float	%9.0g	log(wmfg)
lwfed	float	%9.0g	log(wfed)
lwsta	float	%9.0g	log(wsta)
lwloc	float	%9.0g	log(wloc)
lmix	float	%9.0g	log(mix)
lpctymle	float	%9.0g	log(pctymle)
lpctmin	float	%9.0g	log(pctmin)
lcrmrte	float	%9.0g	lcrmrte - lcrmrte[_n-1]
lprbarr	float	%9.0g	lprbarr - lprbarr[_n-1]
lprbcon	float	%9.0g	lprbconv - lprbconv[_n-1]
lprbpri	float	%9.0g	lprbpri - lprbpri[t-1]
lavgsen	float	%9.0g	lavgsen - lavgsen[t-1]
lpolpc	float	%9.0g	lpolpc - lpolpc[t-1]
ltaxpc	float	%9.0g	ltaxpc - ltaxpc[t-1]
lmix	float	%9.0g	lmix - lmix[t-1]

Lue data R:ään komennoilla

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/panel/cornwell.raw"
data<-read.table(file=file)
```

Lue data SAS:iin komennoilla (Huom. lisää tarvittavat muuttujat INPUT-riville).

```
FILENAME myurl URL 'http://cc.oulu.fi/~jklemela/panel/cornwell.raw';
DATA cornwell;
  INFILE myurl firstobs=1;
  INPUT county year crmrte prbarr prbconv prbpris avgsen;
RUN;
```

5a. Estimoi lineaarinen malli POLS-estimaattorilla (pooled ordinary least squares) käyttäen kaikkia vuosia 81-87, kun mallissa on mukana koostettu aikavaikutus (aggregate time effect). Käytä indikaattorimuuttujia

(dummy variables) koostetun aikavaikutuksen estimoimiseen. Mallissa vastemuuttuja on $\log(crmrte)$ ja aikavaikutuksen lisäksi selittävät muuttujat ovat $\log(prbarr)$, $\log(prbconv)$, $\log(prbpris)$, $\log(avgsen)$ ja $\log(polpc)$.

5b. Estimoi matriisi $\Omega = Eu_iu_i'$, kun u_i on $T \times 1$ vektori mallissa

$$Y_i = X_i\beta + u_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

missä X_i on $T \times K$ -matriisi ja Y_i sekä u_i ovat $T \times 1$ -vektoreita. Käytä estimaattoria

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{u}_i \hat{u}_i',$$

missä $\hat{u}_i = Y_i - X_i \hat{\beta}_{POLS}$. Vastemuuttuja on $\log(crmrte)$ ja selittävät muuttujat ovat $\log(prbarr)$, $\log(prbconv)$, $\log(prbpris)$, $\log(avgsen)$ ja $\log(polpc)$. Kaikki vuodet 81-87 sisältyvät malliin.

5c. Estimoi matriisi $\Omega = Eu_iu_i'$, kun u_i on $T \times 1$ vektori mallissa

$$Y_i = X_i\beta + u_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

missä X_i on $T \times K$ -matriisi ja Y_i sekä u_i ovat $T \times 1$ -vektoreita. Käytä estimaattoria

$$\hat{\Omega}_{RE} = \hat{\sigma}_u^2 I_T + \hat{\sigma}_c^2 j_T j_T',$$

missä $j_T j_T'$ on $T \times T$ matriisi, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä,

$$\hat{\sigma}_u^2 = \hat{\sigma}_v^2 - \hat{\sigma}_c^2,$$

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2,$$

missä $\hat{v}_{it} = Y_{it} - X_{it} \hat{\beta}_{POLS}$ ja

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{2}{NT(T-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{s=t+1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{is}.$$

Vastemuuttuja on $\log(crmrte)$ ja selittävät muuttujat ovat $\log(prbarr)$, $\log(prbconv)$, $\log(prbpris)$, $\log(avgsen)$ ja $\log(polpc)$. Kaikki vuodet 81-87 sisältyvät malliin.

3 Kertauskysymyksiä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Olkoon X_i $T \times K$ matriisi, u_i $T \times 1$ vektori ja $\Omega = E(u_i u_i')$. Oletetaan, että

$$E(u_i u_i' | X_i) = \Omega.$$

Osoita, että

$$E(X_i' \Omega^{-1} u_i u_i' \Omega^{-1} X_i) = E(X_i' \Omega^{-1} X_i).$$

Tehtävä osoittaa, että näitten oletuksen vallitessa

$$\text{Avar}(\hat{\beta}_{FGLS}) = \frac{1}{N} A^{-1} B A^{-1} = \frac{1}{N} \sigma^2 A^{-1},$$

missä $A = E(X_i' \Omega^{-1} X_i)$ ja $B = E(X_i' \Omega^{-1} u_i u_i' \Omega^{-1} X_i)$.

2. Tarkastellaan paneelimallia

$$Y_{it} = X_{it} \beta + u_{it},$$

missä X_{it} on $1 \times K$ -vektori, β on $K \times 1$ -vektori ja Y_i, u_i ovat skalaareita. Oletetaan, että (Y_i, X_i) , $i = 1, \dots, N$, ovat i.i.d., missä $Y_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{iT})'$ ja $X_i = (X'_{i1}, \dots, X'_{iT})'$. Oletetaan, että $E(X'_{it} u_{it}) = 0$ ja $\sum_{t=1}^T E(X'_{it} X_{it})$ on kääntyvä. Olkoon

$$\hat{\beta}_{POLS} = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T X'_{it} X_{it} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T X'_{it} Y_{it} \right).$$

Osoita, että

$$N^{1/2}(\hat{\beta}_{POLS} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, A^{-1} B A^{-1}),$$

kun $N \rightarrow \infty$, missä $A = E(X_i' X_i)$ ja $B = E(X_i' u_i u_i' X_i)$.