Rahoituksen tilastotiede
Laskuharjoitus 3

2014, marraskuu 12

1 Laskutehtäviä

1. Black-Scholes hinta osto-optiolle on

$$C_t = S_t \Phi(z_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(z_-),$$

missä

$$z_\pm = \frac{\log_e \left(S_t / (K e^{-r(T-t)}) \right) \pm (T-t)\, \sigma^2/2}{\sigma \sqrt{T-t}},$$

S_t on osakkeen hinta, $r > 0$ on annualisoitu pankkitilin korko, Φ on standardin normaalijakauman kertymäfunktio ja $T - t$ on aika päättymispäivään ilmaistuna vuoden osamäärinä. Osoita, että

$$\lim_{\sigma \to \infty} C_t = S_t.$$

2. Olkoon C_t Black-Scholes hinta osto-optiolle. Osoita, että

$$\lim_{\sigma \to 0} C_t = (S_t - K e^{-r(T-t)})_+.$$

3. Laske suljettu Black-Scholes kaava myyntioptiolle samalla tavalla kuin luennolla laskettiin osto-option suljettu kaava. Toisin sanoen, laske

$$P_t = e^{-r(T-t)} E_t P_T = e^{-r(T-t)} E_t (K - S_T)_+,$$

missä $S_T = S_t \exp\{\mu(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\, Z\}$, kun $Z \sim N(0,1)$ ja $\mu = r - \sigma^2/2$. Vastaukseksi tulee

$$P_t = -S_t \Phi(-z_+) + K e^{-r(T-t)} \Phi(-z_-),$$

missä

$$z_\pm = \frac{\log_e (S_t/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

4. Tarkista, että myynti- ja osto-option pariteetti toteutuu, kun P_t on määritelty edellisessä tehtävässä ja

$$C_t = S_t \Phi(z_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(z_-). \tag{1}$$

2 Tietokonetehtäviä

5. (a) Hae DAX:in historialliset kurssit komennoilla

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/stafin/dax.csv"
data<-read.csv(file=file)
dax<-data[,7]
dax<-dax[length(dax):1]
plot(dax,type="l")
```

   Estimoi tuottojen volatiliteetti historiallisesta datasta.

   (b) Hae DAX-optioiden markkinahintoja, joita saa esim. sivulta

   `http://www.eurexchange.com/exchange-en/products/idx/dax/17252/`

   DAX:in hinnan saa esim. sivulta

   `http://www1.deutsche-boerse.com/parkett/parkett2.jpg`

   (c) Laske Black-Scholes hintoja osto-optiolle kaavalla (1), kun σ on (annualisoitu) volatiliteetti, joka on estimoitu historiallisesta datasta. Vertaa saatuja tuloksia markkinahintoihin.

3 Kertauskysymyksiä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Johda arbitraasivapaa hinta futuurille.

2. Johda myyntioption ja osto-option pariteetti (put-call parity).

3. Osoita, että

$$\max\left\{S_t - e^{-r(T-t)}K, 0\right\} \le C_t \le S_t,$$

   missä S_t on osakkeen hinta. C_t on osto-option hinta, K on toteutushinta, T on toteuttamishetki ja $r > 0$ on riskitön korko.

4. Osoita, että mikäli arbitraasi ei ole mahdollista niin yhden hinnan laki pätee (absence of arbitrage implies the law of one price).