

Rahoituksen tilastotiede

Laskuharjoitus 4

2014, marraskuu 19

1 Laskutehtäviä

1. Piirrä yhdistyvä binääripuu (recombining binary tree), jossa on 4 tasoa ($n = 4$) ja merkitse puun jokaisen solmun kohdalle osakkeen hinta 4:n askeleen binäärimallissa. Osakkeen alkuhinta on s_0 ja sen jälkeen kun osakkeen hinta on s , niin sen hinta joko nousee arvoon us tai laskee arvoon ds , missä $0 < d < 1 < u$.

2. Osoita, että

$$\binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} = \binom{n}{j},$$

missä $n \geq 2$, $1 \leq j \leq n-1$.

3. Osoita arbitraasiargumentilla, että

$$C_t^{am} \leq C_t^{eu},$$

missä C_t^{am} on amerikkalaisen osto-option hinta ja C_t^{eu} on eurooppalaisen osto-option hinta.

4. Luennolla osoitetaan, että osto-option suojauskerroin on

$$\xi_t = \Phi(z_+),$$

missä Φ on standardin normaalijakauman kertymäfunktio ja

$$z_{\pm} = \frac{\log_e(S_t/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Mikä on myyntioption suojauskerroin?

2 Tietokonetehtäviä

5. (a) Kirjoita ohjelma, joka laskee osto-option hintoja binomikaavalla

$$C_t(s_0) = (1 + r\Delta t)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^j (1 - q)^{n-j} C_T(s_{n,j}), \quad (1)$$

missä s_0 on osakkeen nykyinen hinta, $C_T(s) = \max\{s - K, 0\}$, K on toteutushinta, r on pankkitilin vuosikorko, $\Delta t = (T - t)/n$, T on option toteutushetki,

$$q = \frac{1}{2} + \frac{r\sqrt{\Delta t}}{2\sigma},$$

σ on tuottojen annualisoitu volatilitiiteetti,

$$s_{n,j} = u^j (2 - u)^{n-j} s_0, \quad j = 0, \dots, n$$

ja

$$u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t}.$$

- (b) Vertaile Black-Scholes hintoja (ks. laskuharjoitus 3) binomikaavan hintoihin (kaava (1)) ja arvioi kuinka suureksi n pitää valita, jotta binomimalli antaa hinnan, joka on riittävän lähellä Black-Scholes hintaa.

3 Kertauskysymyksiä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Määrittele johdannaisten hinnoittelua varten käytetty yhden askeleen binäärimalli.
2. Määritä johdannaisen arbitraasivapaa hinta yhden askeleen binäärimallissa.
3. Määrittele monen askeleen binäärimalli osakkeelle.
4. Oletetaan, että osakkeen hinnan jakauma toteuttaa kaikille $t < u$

$$\log\left(\frac{S_u}{S_t}\right) \sim N(\mu(u - t), \sigma^2(u - t))$$

missä $\mu \in \mathbf{R}$ ja $\sigma > 0$. Selitä miten σ voidaan estimoida.

5. Osoita, että amerikkalaisen osto-option arbitraasivapaa hinta on sama kuin eurooppalaisen osto-option arbitraasivapaa hinta.