Rahoituksen tilastotiede
Laskuharjoitus 5

2014, marraskuu 26

1 Laskutehtäviä

1. Osto-option Black-Scholes hinta on

$$C_t(\sigma) = S_t \Phi(z_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(z_-),$$

missä

$$z_\pm = \frac{\log_e \left(S_t / (K e^{-r(T-t)}) \right) \pm (T-t)\, \sigma^2/2}{\sigma \sqrt{T-t}},$$

S_t on osakkeen hinta, $r > 0$ on annualisoitu pankkitilin korko, Φ on standardin normaalijakauman kertymäfunktio ja $T - t$ on aika päättymispäivään ilmaistuna vuoden osamäärinä. Osoita, että

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} C_t(\sigma) = \phi(z_+) S_t \sqrt{T-t},$$

missä ϕ on standardin normaalijakauman tiheysfunktio. Ohje: voit käyttää yhtälöä $\phi(z_-) = \phi(z_+) e^{r(T-t)} S_t / K$.

2. (a) Laske up-and-out-barrier-osto-option hinta yhden askeleen binomimallissa. Yhden askeleen binomimallissa osakkeen hinta hetkellä 0 on s_0 ja hetkellä 1 osakkeen hinta on satunnaismuuttuja S_1, joka saa arvon $s_{1,1}$ todennäköisyydellä p ja arvon $s_{1,0}$ todennäköisyydellä $1 - p$. Option arvo hetkellä 1 on 0 mikäli $S_1 > B$ ja muuten sen arvo on $(S_1 - K)_+$, missä $B > K$.

   (b) Pohdi miten barrier-option hinta voidaan laskea monen askeleen binäärimallissa.

3. (a) Laske aasialaisen osto-option hinta yhden askeleen binomimallissa. Yhden askeleen binomimallissa osakkeen hinta hetkellä 0 on s_0 ja hetkellä 1 osakkeen hinta on satunnaismuuttuja S_1, joka saa arvon $s_{1,1}$ todennäköisyydellä p ja arvon $s_{1,0}$ todennäköisyydellä $1-p$. Aasialaisen option arvo hetkellä 1 on $((S_1+s_0)/2-K)_+$.

   (b) Pohdi miten aasialaisen option hinta voidaan laskea monen askeleen binäärimallissa, jossa aasialaisen osto-option arvo päättymispäivänä on

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} S_i - K\right)_+ ,$$

missä $S_0, \ldots, S_n$ ovat osakkeen arvot kohdissa $0, \ldots, n$.

4. (a) Osoita, että yhden askeleen binomimallissa

$$\mathrm{Var}(S_1) = p(1-p)(s_{1,1}-s_{1,0})^2.$$

   (b) Osoita, että yhden askeleen binomimallissa

$$\mathrm{Cov}(S_1, C_1) = p(1-p)(s_{1,1}-s_{1,0})(C_1(s_{1,1})-C_1(s_{1,0})).$$

Huomautus. Yhden askelen mallissa suojauskertoimelle johdettiin kaava

$$\xi = \frac{\mathrm{Cov}(S_1, C_1)}{\mathrm{Var}(S_1)}.$$

Yhden askeleen binäärimallissa suojauskertoimelle johdetttiin kaava

$$\xi = \frac{C_1(s_{1,1})-C_1(s_{1,0})}{s_{1,1}-s_{1,0}}$$

Edelliset tehtävät osoittavat, että nämä kaavat antavat saman arvon yhden askeleen binäärimallissa.

2 Tietokonetehtäviä

5. Kirjoita ohjelma, joka laskee amerikkalaisen myyntio-option hinnan.

   Ohje: Seuraava ohjelma laskee eurooppalaisen myyntioption hintoja rekursiivisella kaavalla n:n askeleen binäärimallissa. Voit muuttaa ohjelmaa siten, että sillä saa laskettua amerikkalaisen myyntioption hintoja.

```
bs.recursive<-function(S,K,sigma,r,T,n)
{
# S = stock price
# K = strike price
# sigma = annualized volatility
# r = interest rate (annual)
# T = time to expiration (fractions of year)
# n = the number of steps

u<-1+sigma*sqrt(T/n)
q<-1/2+r*sqrt(T/n)/(2*sigma)
stock.prices<-matrix(0,n+1,1)
for (i in 0:n) stock.prices[i+1]<-u^i*(2-u)^(n-i)*S
prev<-pmax(K-stock.prices,0)

for (k in (n-1):0){
    deriv.prices<-matrix(0,k+1,1)
    for (i in 1:(k+1))
        deriv.prices[i]<-(1+r*T/n)^(-1)*((1-q)*prev[i]+q*prev[i+1])
    prev<-deriv.prices
}

return(prev[1])
}
```

3 Kertauskysymyksiä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Black-Scholes kaava voidaan kirjoittaa muotoon

$$H_t(S_t) = e^{-r(T-t)} E_t H_T(S_T),$$

missä t on nykyhetki, T on option päättymishetki, r on riskitön korko, S_t ja S_T ovat osakkeen arvot hetkellä t ja T. Mitä jakaumaa S_T noudattaa ylläolevassa kaavassa?

2. Anna rekursiivinen kaava, jolla amerikkalaisen myyntioption (put option) arbitraasivapaa hinta voidaan laskea.

3. Osoita, että itsensä rahoittavallle varallisuusprosessille pätee kaava

$$W_t = W_0(1+r)^t + \sum_{k=0}^{t-1} \xi_{k+1}(1+r)^{t-k-1}[S_{k+1} - (1+r)S_k],$$

kun portfolio koostuu osakkeesta, jonka hinnat ovat $S_0, \ldots, S_t$ ja velkakirjasta jonka hinnat ovat $B_0, \ldots, B_t$ ja jolle pätee $B_k = (1+r)^k$, sekä ξ_{k+1} on hetkellä k ostettujen osakkeiden lukumäärä ja W_0 on varallisuus hetkellä 0.

4. Johda option hinta yhden askeleen mallissa minimoimalla lauseketta

$$E(W_1 - C_1)^2,$$

missä C_1 on option arvo päättymishetkellä ja

$$W_1 = (1+r)W_0 + \xi[S_1 - (1+r)S_0]$$

on varallisuus hetkellä 1 kun alkupääoma on W_0, ξ on hetkellä 0 ostettujen osakkeiden lukumäärä, S_0 on osakkeen hinta hetkellä 0, S_1 on osakkeen hinta hetkellä 1 ja pankktilin arvo hetkellä 0 on yksi ja hetkellä 1 on $1+r$.