

Rahoituksen tilastotiede

Laskuharjoitus 6

2014, joulukuu 3

1 Laskutehtäviä

1. Oletetaan, että portfolion painot b_t^1, \dots, b_t^N toteuttavat ehdot

$$\sum_{i=1}^N b_t^i = 1, \quad \sum_{i=1}^N |b_t^i| \leq L.$$

Osoita, että

$$\sum_{i=1}^N (b_t^i)_+ \leq \frac{L+1}{2},$$

missä $(x)_+ = \max\{0, x\}$.

2. Olkoon R_1 portfolion 1 tuotto ja R_2 portfolion 2 tuotto. Olkoot $F_1(x) = P(R_1 \leq x)$ ja $F_2(x) = P(R_2 \leq x)$ kertymäfunktiot, missä $x \in \mathbf{R}$. Sanoetaan, että tuoton R_1 jakauma dominoi stokastisesti tuoton R_2 jakaumaa jos $F_2(x) \geq F_1(x)$ kaikille $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että

$$P(R_1 \geq x) \geq P(R_2 \geq x)$$

kaikille $x \in \mathbf{R}$.

3. Olkoon portfolion nettotuoton odotusarvo μ ja nettotuoton varianssi $\sigma^2 > 0$:

$$E(R_t^p) = \mu, \quad \text{Var}(R_t^p) = \sigma^2.$$

Tarkastellaan vivutettua portfoliota, joka muodostetaan lainaamalla riskittömällä korolla pankista ja sijoittamalla saatu raha alkuperäiseen portfolioon. Olkoon r riskitön korko (riskittömän sijoituksen nettotuotto). Olkoon b alkuperäisen portfolion paino ja $1 - b$ pankkitilin paino vivutetussa portfolioissa.

- (a) Laske vivutetun portfolion tuoton odotusarvo ja varianssi.
 - (b) Osoita, että alkuperäisellä portfoliolla ja vivutetulla portfoliolla on sama Sharpen suhdeluku.
4. (a) Määritellään utiliteettifunktio

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad x \in (0, \infty),$$

missä $\gamma > 1$ on riskiaversioparametri. Osoita, että utiliteettifunktio on kupera (konkaavi) (toinen derivaatta on negatiivinen).

- (b) Määritellään utiliteettifunktio

$$u(x) = 1 - e^{-\gamma x}, \quad x \in (0, \infty),$$

missä $\gamma > 0$ on riskiaversioparametri. Osoita, että utiliteettifunktio on kupera (konkaavi).

2 Tietokonetehtäviä

5. (a) Tutkitaan S&P 500 ja Nasdaq-100 osakeindeksien päivittäisiä kursseja. Lue data R:ään ja laske tuotot komennoilla

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/stafin/sp500-ndx100.txt"
data<-read.table(file=file,header=TRUE)
sp500<-data[,1]
ndx100<-data[,2]
```

```
pituus<-length(sp500)
r.sp500<-sp500[2:pituus]/sp500[1:(pituus-1)]
plot(r.sp500,type="l")
```

```
r.ndx100<-ndx100[2:pituus]/ndx100[1:(pituus-1)]
plot(r.ndx100,type="l")
```

- (b) Laske Sharpen tunnusluku S&P 500 indeksille ja Nasdaq-100 indeksille kun oletetaan, että riskitön korko on ollut 0.
- (c) Määritä ne parametrin $\gamma \geq 0$ arvot, joille Markowitzin kriteeri

$$EU - \frac{\gamma}{2} \text{Var}(U)$$

suosittelee Nasdaq-100 indeksii S&P 500 indeksin sijaan, kun U on joko S&P 500-indeksin bruttotuotto tai Nasdaq 100-indeksin bruttotuotto.

- (d) Olkoon $u(x) = x^{1-\gamma}/(1-\gamma)$, $\gamma > 1$. Määrittele ne parametrin γ arvot, joilla utiliteetin odotusarvokriteeri

$$Eu(U)$$

suosittelee Nasdaq-100 indeksiä S&P 500 indeksin sijaan, kun U on joko S&P 500-indeksin bruttotuotto tai Nasdaq 100-indeksin bruttotuotto.

3 Kertauskysymyksiä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Tarkastellaan portfolioita, jotka muodostetaan arvopapereista

$$S_t^1, \dots, S_t^N.$$

Olkoon $b_t = (b_t^1, \dots, b_t^N)$ vektori, jonka elementteinä ovat kunkin arvopaperin osuus portfolioissa. (Tällöin $b_t^i = \xi_{t+1}^i S_t^i / W_t$, missä ξ_{t+1}^i on arvopaperin i lukumäärä portfolioissa, S_t^i on arvopaperin i hinta ja W_t on sijoitusvarallisuus.) Selitä mitä eri portfoliotyyppejä on olemassa ja mitkä ehdot kussakin portfoliotyypissä pätevät vektorille b_t .

2. Selitä mitä tarkoitetaan portfolion valinnan vakiopainostrategialla (constant weight portfolio strategy). Kun käytetään vakiopainostrategiaa niin miten osakkeiden lukumäärä portfolioissa muuttuu kun osakkeen hinta muuttuu?
3. Määrittele Sharpen suhde ja selitä miten se voidaan estimoida.