Rahoituksen tilastotiede
Laskuharjoitus 7

2014, joulukuu 10

1 Laskutehtäviä

1. Sijoitetaan osuus b osakkeeseen ja osuus $1 - b$ pankkitilille. Pankkitilin bruttotuotto on $\mu_r > 0$. Olkoon R_{t+1} osakkeen bruttotuotto ja merkitään
$$ER_{t+1} = \mu \qquad \mathrm{Var}(R_{t+1}) = \sigma^2.$$
Tällöin portfolion bruttotuotto on $R^p_{t+1} = bR_{t+1} + (1 - b)\mu_r$. Maksimoi
$$ER^p_{t+1} - \frac{\gamma}{2}\mathrm{Var}\left(R^p_{t+1}\right)$$
painon b suhteen rajoituksen
$$b \in [0, 1]$$
vallitessa.

2. Sijoitetaan osuus b osakkeeseen ja osuus $1 - b$ pankkitilille. Pankkitilin bruttotuotto on $\mu_r > 0$. Olkoon R_{t+1} osakkeen bruttotuotto ja merkitään
$$ER_{t+1} = \mu \qquad \mathrm{Var}(R_{t+1}) = \sigma^2.$$
Tällöin portfolion bruttotuotto on $R^p_{t+1} = bR_{t+1} + (1 - b)\mu_r$. Maksimoi
$$ER^p_{t+1}$$
painon b suhteen rajoituksen
$$\frac{1}{2}\mathrm{Var}\left(R^p_{t+1}\right) = \sigma_0^2,$$
vallitessa, missä $\sigma_0 > 0$.

3. Tarkastellaan portfoliota, jossa osakeen 1 osuus on $1-b$ ja osakkeen 2 osuus on b, missä $b \in \mathbf{R}$. Merkitään osakkeitten bruttotuottoja R^1_{t+1} ja R^2_{t+1}. Merkitään

$$\mathrm{Var}(R^1_{t+1}) = \sigma_1^2, \qquad \mathrm{Var}(R^2_{t+1}) = \sigma_2^2,$$

$$\mathrm{Cov}(R^1_{t+1}, R^2_{t+1}) = \sigma_{12}.$$

Tällöin portfolion tuotto on $R^p_{t+1} = (1-b)R^1_{t+1} + bR^2_{t+1}$. Laske se b:n arvo, joka minimoi portfolion tuoton varianssin $\mathrm{Var}(R^p_{t+1})$.

4. Olkoon käytettävissä N osaketta ja tarkastellaan portfoliota, jossa osakkeen i osuus on b_i, $i = 1, \ldots, N$. Olkoon $R^i_{t+1} = S^i_{t+1}/S^i_t$ osakkeen i bruttotuotto ja merkitään $\mathrm{Var}(R^i_{t+1}) = \sigma_i^2$, $i = 1, \ldots, N$. Oletetaan, että tuotot ovat korrelomattomia, eli $\mathrm{Cov}(R^i_{t+1}, R^j_{t+1}) = 0$ kun $i \neq j$. Portfolion tuotto on

$$R^p_{t+1} = \sum_{i=1}^N b_i R^i_{t+1}.$$

Johda lauseke sille painovektorille $b = (b_1, \ldots, b_N)$, joka minimoi portfolion varianssin $\mathrm{Var}(R^p_{t+1})$, rajoituksella $\sum_{i=1}^N b^i = 1$. Ohje: voit käyttää Lagrangen kerroinmenetelmää.

2 Tietokonetehtäviä

5. Tutkitaan S&P 500 ja Nasdaq-100 osakeindeksien päivittäisiä kursseja. Lue data R:ään ja laske tuotot komennoilla

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/stafin/sp500-ndx100.txt"
data<-read.table(file=file,header=TRUE)
sp500<-data[,1]
ndx100<-data[,2]

pituus<-length(sp500)
r.sp500<-sp500[2:pituus]/sp500[1:(pituus-1)]
plot(r.sp500,type="l")

r.ndx100<-ndx100[2:pituus]/ndx100[1:(pituus-1)]
plot(r.ndx100,type="l")
```

(a) i. Halutaan sijoittaa S&P 500 indeksiin ja riskittömään korkoon. Valitaan osakepaino maksimoimalla kriteeriä $EU-(\gamma/2)\mathrm{Var}(U)$, missä U on portfolion tuotto. Luennolla johdettiin osakepainon kaava

$$b = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu - r}{\sigma^2},$$

missä μ on S&P 500 indeksin nettotuoton odotusarvo, σ^2 on S&P 500 indeksin tuoton varianssi ja $r > 0$ on riskitön nettokorko. Laske osakepainon b arvoja eri parametrin γ arvoille.

ii. Halutaan sijoittaa Nasdaq-100 indeksiin ja riskittömään korkoon. Laske osakepainon b arvoja eri parametrin γ arvoille.

(b) Halutaan sijoittaa S&P 500 osakeindeksiin ja Nasdaq-100 osakeindeksiin. Valitaan osakepaino maksimoimalla kriteeriä $EU - (\gamma/2)\mathrm{Var}(U)$, missä U on portfolion tuotto. Luennolla johdettiin osakepainon kaava

$$b = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu_2 - \mu_1 - \gamma(\sigma_{12} - \sigma_1^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}. \tag{1}$$

missä μ_1 on S&P 500 indeksin nettotuoton odotusarvo, σ_1^2 on S&P 500 indeksin tuoton varianssi, μ_2 on Nasdaq-100 indeksin nettotuoton odotusarvo, σ_2^2 on Nasadaq-100 indeksin tuoton varianssi ja σ_{12} on tuottojen kovarianssi. Laske Nasdaq-100 indeksin painon b arvoja eri parametrin γ arvoille.

(c) Tutkitaan edellisen tehtävän sijoitusstrategiaa. Laske aikasarja portfolion päivittäisistä tuotoista olettaen, että jokaisena päivänä S&P 500 indeksin paino $1 - b$ ja Nasdaq-100 indeksin paino b on valittu kaavalla (1). Laske Sharpen suhde tuottojen aikasarjasta.

3 Kertauskysymyksiä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Tarkastellaan portfoliota, jossa osakkeen osuus on $b \in \mathbf{R}$ ja pankkitilin osuus on $1 - b$. Merkitään osakkeen tuottoa $R_{t+1} = S_{t+1}/S_t$ ja tuoton odotusarvoa sekä varianssia

$$ER_{t+1} = \mu, \qquad \mathrm{Var}(R_{t+1}) = \sigma^2.$$

Olkoon pankkitilin bruttotuotto $\mu_r > 0$. Johda b joka maksimoi suureen

$$ER_{t+1}^p - \frac{\gamma}{2}\mathrm{Var}(R_{t+1}^p),$$

missä $R_{t+1}^p = bR_{t+1} + (1 - b)\mu_r$.

2. Tarkastellaan portfoliota, jossa on kaksi osaketta ja riskitön sijoitus. Olkoon osakkeen 1 paino b_1, osakkeen 2 paino b_2 ja riskittömän sijoituksen paino $1 - b_1 - b_2$. Merkitään tuottojen odotusarvoja ja variansseja

$$E(R^i_{t+1}) = \mu_i, \qquad \mathrm{Var}(R^i_{t+1}) = \sigma^2_i,$$

$i = 1, 2$,

$$\mathrm{Cov}(R^1_{t+1}, R^2_{t+1}) = \sigma_{12}.$$

Johda b kun maksimoidaan

$$ER^p_{t+1} - \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{Var}(R^p_{t+1}),$$

missä

$$R^p_{t+1} = b_1 R^1_{t+1} + b_2 R^2_{t+1} + (1 - b_1 - b_2)\mu_r.$$

3. Tarkastellaan portfoliota, jossa osakkeen 1 osuus on $1 - b$, ja osakkeen 2 osuus on b, missä $b \in \mathbf{R}$. Olkoon $R^1_{t+1} = S^1_{t+1}/S^1_t$ osakkeen 1 tuotto ja $R^2_{t+1} = S^2_{t+1}/S^2_t$ osakkeen 2 tuotto. Merkitään tuottojen odotusarvoja ja variansseja

$$E(R^1_{t+1}) = \mu_1, \qquad \mathrm{Var}(R^1_{t+1}) = \sigma^2_1,$$

$$E(R^2_{t+1}) = \mu_2, \qquad \mathrm{Var}(R^2_{t+1}) = \sigma^2_2,$$

$$\mathrm{Cov}(R^1_{t+1}, R^2_{t+1}) = \sigma_{12}.$$

Johda b kun maksimoidaan suure

$$ER^p_{t+1} - \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{Var}(R^p_{t+1}),$$

missä

$$R^p_{t+1} = (1 - b)R^1_{t+1} + bR^2_{t+1}.$$

4. Laske $b \in \mathbf{R}^N$ joka maksimoi

$$b'\mu - \frac{\gamma}{2} b'\Sigma b$$

rajoituksen

$$b' 1_N = 1$$

vallitessa, missä μ on N-vektori, Σ on $N \times N$ kovarianssimatriisi, $\gamma > 0$ ja 1_N on N-vektori, jonka elementit ovat ykkösiä.