Tilastollinen päättely II
Laskuharjoitus 10

2015, huhtikuu 1

1 Laskutehtäviä

1. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. jakaumalla $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ja $Z_1, \ldots, Z_n$ i.i.d. jakaumalla $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n$ ja $Z_1, \ldots, Z_n$ lisäksi toisistaan riippumattomia. Olkoon

$$\Theta = \{(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2) : \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}, \sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0\}$$

ja

$$\Theta_0 = \{(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_1^2) : \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}, \sigma_1^2 > 0\}.$$

Määritellään

$$\hat{\theta} = \text{argmax}_{\theta \in \Theta} f_{Y,Z}(y, z)$$

ja

$$\hat{\theta}_0 = \text{argmax}_{\theta \in \Theta_0} f_{Y,Z}(y, z).$$

missä $f_{Y,Z}(y, z)$ on otoksen $(Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_n)$ tiheysfunktio.

Laske suure

$$W_p = 2\left[l(\hat{\theta}) - l(\hat{\theta}_0)\right].$$

2. Olkoon

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

missä $Y_i \in \mathbf{R}$, $X_i \in \mathbf{R}$, $\beta_0, \beta_1 \in \mathbf{R}$, X_i ja ϵ_i ovat riippumattomia, X_i ovat keskenään riippumattomia, ϵ_i ovat keskenään riippumattomia ja $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Osoita,että

$$\text{Cov}\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1 \mid X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right) = -\frac{\bar{x}\,\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

missä

$$\hat\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar Y)(X_i - \bar X)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar X)^2}, \qquad \hat\beta_0 = \bar Y - \hat\beta_1 \bar X.$$

Huomaa, että luennolla osoitettiin, että

$$\mathrm{Var}\left(\hat\beta_1 \mid X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar X)^2}.$$

3. Olkoon $X \in \mathbf{R}^p$ ja $\epsilon \in \mathbf{R}$. Osoita seuraavat väitteet.
   (a) Jos $E(\epsilon \mid X) = 0$, niin $E(X\epsilon) = 0$.
   (b) Jos $E(\epsilon^2 \mid X) = \sigma^2$, niin $E(\epsilon^2 X'X) = \sigma^2 E(X'X)$.

4. Olkoon

$$Y = \beta' X + \epsilon,$$

missä $Y \in \mathbf{R}$, $X \in \mathbf{R}^p$ ja $\beta \in \mathbf{R}^p$. Olkoon $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ otos (X, Y):n jakaumasta. Merkitään $\mathcal{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ ja $\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$. Pienimmän neliösumman estimaattori on

$$\hat\beta = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{Y}.$$

Oletetaan, että $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ ovat i.i.d., $E(XX')$ on kääntyvä ja $E(X\epsilon) = 0$. Osoita, että

$$\hat\beta \xrightarrow{p} \beta,$$

kun $n \to \infty$.

5. Hölderin epäyhtälön mukaan

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \, \|g\|_q,$$

missä $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$, $\|f\|_p = (\int |f|^p)^{1/p}$. Osoita, että

$$E(XY) \le (EX^2)^{1/2}(EY^2)^{1/2}.$$

2 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoituksiin)

1. Merkitään

$$\bar l(\theta) = E_{\theta_0} \log f(Y, \theta),$$

missä $f(y, \theta)$ on tiheysfunktio ja $\theta \in \Theta$ on parametri. Osoita Jensenin epäyhtälön avulla, että

$$\bar l(\theta) \le \bar l(\theta_0).$$