Tilastollinen päättely II
Laskuharjoitus 11

2015, huhtikuu 8

1 Laskutehtäviä

1. Osoita, että gammajakaumien perhe kuuluu eksponenttiperheitten luokkaan. Gamma-jakauman tiheysfunktio on

$$f(y, \lambda, \kappa) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} y^{\kappa-1} \exp\{-\lambda y\},$$

missä $y > 0$, $\lambda, \kappa > 0$.

2. Osoita, että yksiulotteisten normaalijakaumien perhe kuuluu eksponenttiperheitten luokkaan, kun $\mu \in \mathbf{R}$ ja $\sigma^2 > 0$ ovat tuntemattomia parametreja.

3. Olkoon eksponenttiperheen tiheysfunktio

$$f(y, \theta) = \exp\{s(y)\theta - \kappa(\theta)\} f_0(y),$$

missä $\theta \in \mathcal{N} \subset \mathbf{R}$. Osoita, että κ on konveksi funktio.

4. Olkoon eksponenttiperheen tiheysfunktio

$$f(y, \theta) = \exp\{s(y)\theta - \kappa(\theta)\} f_0(y),$$

missä $\theta \in \mathbf{R}$. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. otos jakaumasta $f(y, \theta)$. Johda suurimman uskottavuuden estimaattori.

5. Olkoon eksponenttiperheen tiheysfunktio

$$f(y, \theta) = \exp\{s(y)'\theta - \kappa(\theta)\} f_0(y),$$

missä $\theta \in \mathbf{R}^p$. Laske Fisher-informaatiomatriisi $I(\theta)$.

2 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoituksiin)

1. Olkoon

$$f(y,\theta) = \exp\{\theta s(y) - \kappa(\theta)\} f_0(y), \qquad \theta \in \mathbf{R},\ \ y \in \mathbf{R},$$

eksponenttiperheeseen kuuluva tiheysfunktio, missä $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on tiheyfunktio ja $\kappa(\theta) = \log \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(y)\theta} f_0(y)\, dy$. Olkoon $\mathcal{N} = \{\theta \in \mathbf{R} : \kappa(\theta) < \infty\}$. Osoita, että $\mathcal{N}$ on konveksi joukko.

2. Olkoon

$$f(y,\theta) = \exp\{\theta s(y) - \kappa(\theta)\} f_0(y), \qquad \theta \in \mathbf{R},\ \ y \in \mathbf{R},$$

eksponenttiperheeseen kuuluva tiheysfunktio, missä $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on tiheyfunktio ja $\kappa(\theta) = \log \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(y)\theta} f_0(y)\, dy$. Olkoon $Y \sim f(y,\theta)$. Osoita, että

$$\log E e^{ts(Y)} = \kappa(\theta + t) - \kappa(\theta),$$

missä $t \in \mathbf{R}$ ja $\theta \in \mathbf{R}$.