Tilastollinen päättely II
Laskuharjoitus 12

2015, huhtikuu 15

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon eksponenttiperheen tiheysfunktio
$$f(y,\theta) = \exp\{s(y)'\theta - \kappa(\theta)\}\, f_0(y),$$
missä $\theta \in \mathbf{R}$. Olkoon Y:n jakauma $f(y,\theta)$. Osoita, että
$$Es(Y) = \kappa'(\theta),$$
käyttäen tulosta
$$E\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(Y,\theta) = 0.$$

2. Olkoon eksponenttiperheen tiheysfunktio
$$f(y,\theta) = \exp\{s(y)'\theta - \kappa(\theta)\}\, f_0(y),$$
missä $\theta \in \mathbf{R}$. Olkoon Y:n jakauma $f(y,\theta)$. Osoita, että
$$\mathrm{Var}(s(Y)) = \kappa''(\theta),$$
käyttäen tulosta
$$E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(Y,\theta)\right]^2 = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(Y,\theta)\right].$$

3. Olkoon $Y_1,\dots,Y_n$ i.i.d. jakaumalla $N(\mu,\sigma^2)$. Olkoon parametrin σ^2 estimaattori
$$T_a = a\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2,$$
missä $a > 0$. Ratkaise minimointiongelma
$$\mathrm{argmin}_{a>0} E\left(T_a - \sigma^2\right)^2.$$

4. Olkoon otoksen Y tiheysfunktio $f(y,\theta)$, missä $\theta \in \mathbf{R}^p$. Olkoon $\psi : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ ja $T = (T_1, \ldots, T_q)^T$ parametrin $\psi(\theta) = (\psi_1(\theta), \ldots, \psi_q(\theta))^T \in \mathbf{R}^q$ harhaton estimaattori, eli $ET = \psi(\theta)$. Osoita, että $q \times p$ matriisille $\mathrm{Cov}(T, S)$, missä

$$S = \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(Y,\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \log f(Y,\theta), \ldots, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \log f(Y,\theta) \right)^T,$$

pätee

$$\mathrm{Cov}(T, S) = \left[\frac{\partial \psi_i(\theta)}{\partial \theta_j} \right]_{i=1,\ldots,q, j=1,\ldots,p}.$$

5. Olkoon otoksen Y tiheysfunktio $f(y,\theta)$, missä $\theta \in \mathbf{R}$. Halutaan estimoida $\psi(\theta)$, missä $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Olkoon $T = t(Y)$ harhainen estimaattori, eli $ET \neq \psi(\theta)$. Johda epäyhtälö

$$\mathrm{Var}(T) \geq \frac{(\psi'(\theta) + b'(\theta))^2}{I(\theta)},$$

missä $b(\theta) = ET - \psi(\theta)$ ja $I(\theta) = \mathrm{Var}(S)$, kun $S = \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(Y,\theta)$.

2 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoituksiin)

1. Olkoon Y havainto jakaumasta $f(y,\theta)$ ja $T = t(Y)$ tunnusluku parametrin $\psi(\theta) \in \mathbf{R}$ estimoimiseksi. Osoita, että

$$E(T - \psi(\theta)^2 = \mathrm{Var}(T) + (ET - \psi(\theta))^2.$$

2. Olkoon otoksen Y tiheysfunktio $f(y,\theta)$, missä $\theta \in \mathbf{R}$. Halutaan estimoida $\psi(\theta)$, missä $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Olkoon $T = t(Y)$ harhaton estimaattori, eli $ET = \psi(\theta)$. Johda Cramér-Raon epäyhtälö

$$\mathrm{Var}(T) \geq \frac{(\psi'(\theta))^2}{I(\theta)},$$

missä $I(\theta) = \mathrm{Var}(S)$, kun $S = \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(Y,\theta)$.