Tilastollinen päättely II
Laskuharjoitus 13

2015, huhtikuu 22

1 Laskutehtäviä

1. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathbf{R}$ samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden tiheysfunktio on $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Määritellään ydinestimaattori tihysfunktion arvolle $f(y)$, $y \in \mathbf{R}$, kaavalla

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K_h(y - Y_i),$$

missä $K_h(y) = K(y/h)/h$, $K : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $h > 0$. Olkoon $\int_{-\infty}^{\infty} K(y)\, dy = 1$. Osoita, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\, dy = 1.$$

2. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jatkuva pisteessä $y \in \mathbf{R}$. Olkoon $K : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s.e. $\int_{-\infty}^{\infty} |K| < \infty$. Osoita, että

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} K_h(y - x) f(x)\, dx = f(y) \int_{-\infty}^{\infty} K,$$

missä $K_h(y) = K(y/h)/h$.

3. Olkoon $Y \sim N(0, \theta)$, $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. Onko Y täydellinen tunnusluku?

4. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. tasaisella jakaumalla $\mathrm{Unif}(0, \theta)$.

   (a) Määritä vakio a siten, että $aY_{(n)}$ on harhaton parametrille θ, missä $Y_{(n)} = \max_{i=1,\ldots,n} Y_i$.

(b) Perustele, että $aY_{(n)}$ on pienimmän varianssin harhaton estimaattori toteamalla, että $Y_{(n)}$ on tyhjentävä täydellinen tunnusluku (ei tarvitse todistaa).

Voit ratkaista tehtävän myös toisella tavalla.

(a) Totea, että $2\bar{Y}$ on harhaton parametrille θ, missä $\bar{Y}$ on otoskeskiarvo.

(b) Laske $W = E(2\bar{Y} \mid Y_{(n)})$, joka on pienimmän varianssin harhaton estimaattori koska $Y_{(n)}$ on tyhjentävä täydellinen tunnusluku.

5. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathbf{R}$ otos ja

$$g(y, \theta) = I_{[0,\infty)}(y - \theta) - I_{[0,\infty)}(\theta - y),$$

missä $y \in \mathbf{R}$, $\theta \in \mathbf{R}$. Osoita, että otosmediaani ratkaisee yhtälön

$$\sum_{i=1}^{n} g(Y_i, \theta) = 0$$

parametrin θ suhteen.

2 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoituksiin)

1. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathbf{R}$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden tiheysfunktio on $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Määritellään ydinestimaattori tihysfunktion arvolle $f(y)$, missä $y \in \mathbf{R}$, kaavalla

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K_h(x - Y_i),$$

missä $K_h(y) = K(y/h)/h$, $K : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $h > 0$. Osoita, että

$$\operatorname{Var}\left(\hat{f}(y)\right) \le \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_h^2(y - x) f(x)\, dx.$$

2. Olkoon $Y \sim f(y, \theta)$, $S = s(Y)$ tyhjentävä tunnusluku ja $T = t(Y)$ harhaton estimaatori parametrille $\psi(\theta)$. Osoita, että estimaattori $W = E(T \mid S)$ on harhaton ja

$$\operatorname{Var}(T) \ge \operatorname{Var}(W).$$

(Rao-Blackwellin lause)

3. Olkoon $Y \sim f(y, \theta)$, $S = s(Y)$ tyhjentävä ja täydellinen tunnusluku ja $T = t(Y)$ harhaton estimaatori parametrille $\psi(\theta)$. Osoita, että estimaattorilla $W = E(T \mid S)$ on pienin varianssi kaikkien harhattomien tunnuslukujen joukossa.

4. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n$ samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden jakauma on $N(\mu, \sigma^2)$. Johda parametrien $\mu \in \mathbf{R}$ ja $\sigma^2 > 0$ estimaatit momenttimenetelmällä.

5. Olkoon nollahypoteesi

$$H_0 : Y_1, \ldots, Y_n \text{ ovat i.i.d. jakaumalla } N(\mu_0, \sigma^2).$$

Olkoon vaihtoehtoinen hypoteesi

$$H_1 : Y_1, \ldots, Y_n \text{ ovat i.i.d. jakaumalla } N(\mu_1, \sigma^2),$$

missä $\mu_1 > \mu_0$. Valitaan testisuure $\bar{Y} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ ja hylätään nollahypoteesi, jos $\bar{Y} \geq t_\alpha$. Valitse $t_\alpha \in \mathbf{R}$ siten, että testin koko on $\alpha \in (0, 1)$.