Tilastollinen päättely II
Laskuharjoitus 14

2015, huhtikuu 29

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon S tyhjentävä ja täydellinen tunnusluku. Olkoon $U = f(S)$ jollekin funktiolle f ja olkoon U harhaton estimaattori. Osoita, että U on pienimmän varianssin harhaton estimaattori.

2. Olkoon Y havainto. Olkoon testi 1 s.e. H_0 hylätään kun $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha_1}$ ja testi 2 s.e. H_0 hylätään kun $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha_2}$. Olkoon $P_{H_0}(Y \in \mathcal{Y}_{\alpha_1}) = \alpha_1$ ja $P_{H_0}(Y \in \mathcal{Y}_{\alpha_2}) = \alpha_2$. Olkoon $I \sim \text{Bernoulli}(p)$, missä $p = (\alpha_2 - \alpha)/(\alpha_2 - \alpha_1)$ ja olkoot I ja Y riippumattomia. Olkoon testi 3 s.e. H_0 hylätään jos $Y \in \mathcal{Y}$, missä
$$\mathcal{Y} = \begin{cases} \mathcal{Y}_{\alpha_1}, & I = 1, \\ \mathcal{Y}_{\alpha_2}, & I = 0. \end{cases}$$
Osoita, että testin 3 koko on α.

3. Olkoon
$$H_0 : Y \sim N(\mu_0, 1)$$
ja
$$H_1 : Y \sim N(\mu_1, 1)$$
missä $\mu_1 > \mu_0$. Johda Neyman-Pearsonin lemman testisuure $t(Y)$ (uskottavuusosamäärätestisuure) ja muodosta testi, jonka koko on α.

4. Olkoon $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ i.i.d. otos Paretojakaumasta, jonka kertymäfunktio on
$$F(y, \psi) = (1 - y^{-\psi}) I_{[1,\infty)}(y),$$
missä $\psi > 0$. Johda Neyman-Pearsonin lemman testisuure $T = t(Y)$ testille
$$H_0 : \psi = \psi_0$$

ja

$$H_1 : \psi = \psi_1$$

missä $\psi_1 > \psi_0$.

5. Laske edellisen tehtävän tapauksessa p-arvo, $P_{H_0}(T > t_{obs})$, kun ollaan saatu testisuureen arvo $t_{obs} = t(y)$ otoksen havaitusta arvosta y.

   Ohje: osoita, että nollahypoteesin vallitessa $\sum_{i=1}^n \log Y_i \sim \text{Gamma}(n, \psi_0)$.

2 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoituksiin)

1. Olkoon

   $$f(y, \theta) = \exp\{s(y)\theta - \kappa(\theta) + c(y)\}$$

   tiheysfunktio, missä $y \in \mathbf{R}$ ja $\theta \in \mathbf{R}$. Olkoon $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ i.i.d. otos tiheysfunktion $f(y, \theta)$ jakaumasta. Osoita, että Neyman-Pearsonin lemman mukainen testi hypoteeseille

   $$H_0 : \theta = \theta_0,$$

   $$H_1 : \theta = \theta_1,$$

   missä $\theta_1 > \theta_0$, on testi, jonka kriittinen alue on

   $$\mathcal{Y} = \left\{ y = (y_1, \ldots, y_n) : \sum_{i=1}^n s(y_j) \geq t'_\alpha \right\},$$

   missä t'_α on valittu siten, että testin koko on α.

2. Olkoot f_0 ja f_1 tiheysfunktioita ja havaitaan Y. Olkoon

   $$H_0 : Y \sim f_0$$

   ja

   $$H_1 : Y \sim f_1.$$

   Osoita, että kokoa $\alpha \in (0, 1)$ olevista testeistä voimakkaimmalla testillä on kriittinen alue

   $$\mathcal{Y} = \left\{ y : \frac{f_1(y)}{f_0(y)} \geq t_\alpha \right\},$$

   missä t_α on s.e. $\int_{\mathcal{Y}} f_0 = \alpha$.