Tilastollinen päättely II
Laskuharjoitus 2

2015, tammikuu 28

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon S satunnaismuuttuja, jolle pätee $P(S=0)=1$. Olkoon S_n, $n=1,2,\ldots$, jono satunnaismuuttujia, joille pätee $P(S_n=1/n)=1$. Osoita, että $S_n \xrightarrow{d} S$, kun $n\to\infty$.

2. Olkoon $S_n \xrightarrow{p} s_0$ ja olkoon $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ jatkuva s_0:ssa. Osoita, että $h(S_n) \xrightarrow{p} h(s_0)$.

3. Osoita, että jos $S_n \xrightarrow{d} s_0$, niin $S_n \xrightarrow{p} s_0$, missä $s_0\in\mathbf{R}$ on vakio. Ohje: Laskuharjoitus 1, Tehtävä 3 antaa kaavan $P(|S_n-s_0|\le\epsilon)=P(S_n\le s_0+\epsilon)-P(S_n\le s_0-\epsilon)$.

4. Olkoon X portfolion a ylijäämätuotto ja olkoon Y portfolion b ylijäämätuotto. Sharpen suhteet ovat

$$\mathrm{Sh}_a=\frac{EX}{\mathrm{sd}(X)},\qquad \mathrm{Sh}_b=\frac{EY}{\mathrm{sd}(Y)}.$$

Havaitaan historiallisia ylijäämätuottoja X_i ja Y_i, $i=1,\ldots,n$. Sharpen suhteen estimaattori voidaan määritellä kaavalla

$$\widehat{\mathrm{Sh}}_a=\frac{\bar{X}}{(n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2-\bar{X}^2)^{1/2}},$$

missä $\bar{X}=n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$. Testataan nollahypoteesia

$$H_0:\mathrm{Sh}_a=\mathrm{Sh}_b.$$

Määritellään testisuure

$$T=\widehat{\mathrm{Sh}}_a-\widehat{\mathrm{Sh}}_b.$$

Johda testisuureen asymptoottinen jakauma.

Ohje: Merkitään

$$S_n = \left(\bar{X}, \bar{Y}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \right)'.$$

Valitaan h siten, että $h(S_n) = \widehat{\mathrm{Sh}}_a - \widehat{\mathrm{Sh}}_b$. Oletetaan tunnetuksi, että

$$n^{1/2}(S_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \Psi),$$

kun $n \to \infty$, missä $\theta = (EX, EY, EX^2, EY^2)'$ ja Ψ on 4×4 kovarianssimatriisi ja sovelletaan delta-menetelmää.

2 Tietokonetehtäviä

5. Piirrä gammajakauman tiheysfunktion

$$f_Y(y) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} y^{\kappa-1} \exp\{-\lambda y\}, \qquad y > 0,$$

kuvaaja kun $\kappa = 2$ ja $\lambda = 1$.

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoituksiin)

1. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. jono satunnaismuuttujia, joille pätee $EY_i = \mu$ ja $\mathrm{Var}(Y_i) = \sigma^2$. Merkitään $\bar{Y} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Osoita, että $E\bar{Y} = \mu$ ja $\mathrm{Var}(\bar{Y}) = \sigma^2/n$.

2. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. jono satunnaismuuttujia, joille pätee $EY_i = \mu$ ja $\mathrm{Var}(Y_i) = \sigma^2$. Merkitään $s^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2$. Osoita, että $Es^2 = \sigma^2$.