Tilastollinen päättely II
Laskuharjoitus 3

2015, helmikuu 4

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. ja $EY_1 = \mu$ sekä $\mathrm{Var}(Y_1) = \sigma^2$. Osoita, että

$$n^{1/2}(\bar{Y} - \mu)^2 \xrightarrow{p} 0,$$

kun $n \to \infty$, missä $\bar{Y}$ on otoskeskiarvo.

2. Olkoon $Z_n \xrightarrow{d} Z$, missä $Z \sim N(0,1)$. Osoita, että $Z_n = O_p(1)$.

3. Olkoon Y reaaliarvoinen satunnaismuuttuja. Olkoon $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2 < \infty$. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. otos Y:n jakaumasta. Osoita, että

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{p} EY,$$

kun $n \to \infty$. Ohje: käytä epäyhtälöä

$$P(|Z| > \epsilon) \leq \frac{EZ^2}{\epsilon^2}$$

kun $\epsilon > 0$. Valitse $Z = \bar{Y} - EY$.

4. Olkoon Y reaaliarvoinen satunnaismuuttuja ja $\mathrm{Var}(Y) \leq C < \infty$. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ samoin jakautunut otos Y:n jakaumasta.

   (a) Osoita, että

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) \leq C.$$

(b) Oletetaan lisäksi, että $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$, kun $|i-j| > m$, missä $m \geq 1$ on kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{p} EY,$$

kun $n \to \infty$.

2 Tietokonetehtäviä

S&P 500 osakeindeksin hintatiedot ovat osoitteessa

`http://cc.oulu.fi/~jklemela/stainf/sp500.csv`

Lue data R:ään ja muuta hintojen aikasarja tuottojen aikasarjaksi. Ohje: käytä komentoja

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/stainf/sp500.csv"
data<-read.csv(file=file)
sp500<-data[,7]
sp500<-sp500[length(sp500):1]
plot(sp500,type="l")

pituus<-length(sp500)
tuotto<-log(sp500[2:pituus])-log(sp500[1:(pituus-1)])
plot(tuotto,type="l")
```

5. Laske 95% luottamusväli Sharpen suhteelle. (Voit olettaa, että riskitömän koron bruttotuotto on 0.) Käytä kaavaa

$$\widehat{\mathrm{Sh}} \pm z_{1-\alpha/2} n^{-1/2} \hat{\sigma},$$

missä

$$\widehat{\mathrm{Sh}} = (\Delta t)^{-1/2} \frac{\bar{X}}{(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2)^{1/2}},$$

$\Delta t = 1/250$, $z_{1-\alpha/2}$ on standardin normaalijakauman $1-\alpha/2$-kvantiili, $\bar{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ja X_i on S&P 500 indeksin tuotto. Lisäksi

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\nabla h(\hat{\theta})' \hat{\Psi} \nabla h(\hat{\theta})}$$

$$\hat{\theta} = \left(\bar{X}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right),$$

$$\nabla h(x_1, x_2) = (\Delta t)^{-1/2} \left(\frac{x_2}{(x_2 - x_1^2)^{3/2}}, -\frac{1}{2} \frac{x_1}{(x_2 - x_1^2)^{3/2}} \right)'$$

ja

$$\hat{\Psi} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})(Z_i - \bar{Z})',$$

missä $Z_i = (X_i, X_i^2)'$.

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoituksiin)

1. Olkoon T_n reaaliarvoinen satunnaismuuttuja ja oletetaan, että

   (a) funktion $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivaatta h' on jatkuva pisteessä $\mu \in \mathbf{R}$,

   (b) tunnusluvulle T_n pätee, että

   $$\frac{T_n - \mu}{\mathrm{Var}(T_n)^{1/2}} \xrightarrow{d} Z,$$

   kun $n \to \infty$, missä $Z \sim N(0, 1)$,

   (c) $n \,\mathrm{Var}(T_n) \xrightarrow{d} \tau^2$, kun $n \to \infty$, missä $\tau^2 > 0$.

   Osoita, että
   $$n^{1/2} \frac{h(T_n) - h(\mu)}{\tau h'(\mu)} \xrightarrow{d} Z,$$
   kun $n \to \infty$, missä $Z \sim N(0, 1)$.

2. Määrittele mitä tarkoitetaan ilmauksilla

   (a) $s_n = o(a_n)$,

   (b) $s_n = O(a_n)$,

   (c) $S_n = o_p(a_n)$,

   (d) $S_n = O_p(a_n)$,

   missä (s_n) ja (a_n) ovat reaalilukujonoja, $a_n \geq 0$ ja (S_n) on jono reaaliarvoisia satunnaismuuttujia.