

Tilastollinen päättely II

Laskuharjoitus 4

2015, helmikuu 11

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon U_1, \dots, U_n i.i.d. otos tasaisesta jakaumasta $\text{tas}([0, 1])$. Olkoon $U_{(r)}$ r :s järjestystunnusluku, missä $1 \leq r \leq n$. Osoita, että

$$EU_{(r)} = \frac{r}{n+1}.$$

2. Olkoon U_1, \dots, U_n i.i.d. otos tasaisesta jakaumasta $\text{tas}([0, 1])$. Olkoon $U_{(r)}$ r :s järjestystunnusluku, missä $1 \leq r \leq n$. Osoita, että

$$EU_{(r)}^2 = \frac{(r+1)r}{(n+2)(n+1)}.$$

3. Olkoot Y_1, \dots, Y_n riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia Pareto-jakaumalla parametrein γ ja a . Oletetaan, että parametri a on tunnettu (jakauman alkupiste). Johda likimääräinen luottamusväli parametrille $\gamma > 0$ käyttäen raja-arvotulosta

$$n \frac{\gamma}{a} (Y_{(1)} - a) \xrightarrow{d} Z,$$

kun $n \rightarrow \infty$, missä $Z \sim \exp(1)$ noudattaa eksponenttijakaumaa parametrilla 1.

4. Paretojakauman kertymäfunktio on

$$F(y) = [1 - (y/a)^{-\gamma}] I_{[a, \infty)}(y),$$

missä $a, \gamma > 0$. Laske Paretojakauman kertymäfunktion käänteisfunktion ja selitä miten miten sen avulla voidaan generoida satunnaismuuttujia Paretojakaumasta.

2 Tietokonetehtäviä

5. Simuloi $m = 1000$ kappaletta riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia satunnaismuuttujan

$$Z_n = n \frac{\gamma}{a} (Y_{(1)} - a)$$

jakaumasta, missä $Y_{(1)}$ on pienin havainto, kun Y_1, \dots, Y_n ovat i.i.d. Pareto-jakaumalla parametrein γ ja a . Voit asettaa $a = 1$ ja $\gamma = 5$.

Vertaa satunnaismuuttujan Z_n jakaumaa $\exp(1)$ -jakaumaan QQ-kuviolla kun $n = 10, 100, 1000$.

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Tiedetään, että kun Y_1, \dots, Y_n ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia joilla on tiheysfunktio $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ja kertymäfunktio $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, niin r :nnessä järjestystunnusluvun $Y_{(r)}$ tiheysfunktio on

$$f_{Y_{(r)}}(y) = \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} F(y)^{r-1} f(y) (1-F(y))^{n-r}.$$

Olkoot U_1, \dots, U_n riippumattomia ja samoin jakautuneita välillä $[0, 1]$ tasaisesti jakautuneita satunnaismuuttujia.

- (a) Mikä on r :nnessä järjestystunnusluvun $U_{(r)}$ tiheysfunktio?
(b) Laske $EU_{(r)}$.

2. Paretojakauman kertymäfunktio on

$$F(y) = [1 - (y/a)^{-\gamma}] I_{[a, \infty)}(y),$$

missä $a, \gamma > 0$. Olkoon Y_1, \dots, Y_n i.i.d. otos Pareto-jakaumasta. Olkoon

$$Z_n = n \frac{\gamma}{a} (Y_{(1)} - a),$$

missä $Y_{(1)}$ on otoksen pienin havainto. Osoita, että

$$Z_n \xrightarrow{d} Z,$$

missä $Z \sim \exp(1)$.