Tilastollinen päättely II
Laskuharjoitus 5

2015, helmikuu 18

1 Laskutehtäviä

1. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n$ riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden kumulantit generoivat funktiot ovat $K_1, \ldots, K_n$. Osoita, että satunnaismuuttujan $a + \sum_{j=1}^n b_j Y_j$ kumulantit generoiva funktio on

$$K(t) = at + \sum_{j=1}^{n} K_j(b_j t),$$

kun $a, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$.

2. Osoita, että Gamma-jakauman kumulantit generoiva funktio on

$$K(t) = \kappa \log\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right), \qquad t < \lambda,$$

kun Gamma-jakauman tiheysfunktio on

$$f(y) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)}\, y^{\kappa-1} \exp\{-\lambda y\}, \qquad y > 0,$$

missä $\kappa, \lambda > 0$.

3. Olkoon $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, missä $\mu \in \mathbf{R}$ ja $\sigma > 0$. Osoita, että Y:n momentit generoiva funktio on

$$M(t) = \exp\left\{t\mu + \frac{1}{2}\, t^2\sigma^2\right\}.$$

4. Olkoon $Y \sim N_p(\mu, \Omega)$, missä $\mu \in \mathbf{R}^p$ ja Ω on $p \times p$ kovarianssimatriisi. Osoita, että Y:n momentit generoiva funktio on

$$M(t) = \exp\left\{t'\mu + \frac{1}{2}\, t'\Omega t\right\}.$$

2 Tietokonetehtäviä

5. Simuloi Poisson jakaumasta $n = 100$ havaintoa parametrin arvolla $\theta = 2$. (Voit käyttää R-funktiota "rpois".)

   (a) Laske 95% luottamusväli parametrille θ kun väli on $[L, U]$, missä

   $$L = \left(\bar{Y}^{1/2} - n^{-1/2} 2^{-1} z_{1-\alpha}\right)^2$$

   ja

   $$U = \left(\bar{Y}^{1/2} - n^{-1/2} 2^{-1} z_{\alpha}\right)^2,$$

   missä z_α ja $z_{1-\alpha}$ ovat standardin normaalijakauman kvantiileja. (Tämä luottamusväli perustuu normaalijakauma-approksimaatioon ja delta-menetelmään kun $h(\theta) = \theta^{-1/2}$.)

   (b) Laske 95% luottamusväli parametrille θ kun väli on

   $$\left\{\theta > 0 : z_\alpha \leq n^{1/2} \theta^{-1/2} (\bar{Y} - \theta) \leq z_{1-\alpha}\right\},$$

   missä z_α ja $z_{1-\alpha}$ ovat standardin normaalijakauman kvantiileja. (Tämä luottamusväli perustuu normaalijakauma-approksimaatioon.)

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoituksiin)

1. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ otos riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja olkoon $EY_1 = \mu$ sekä $\mathrm{Var}(Y_1) = \sigma^2$. Johda luottamusväli parametrille μ, joka pätee likimain suurelle otoskoolle n, käyttäen keskeistä raja-arvolausetta.

2. Olkoon $Y \sim N_p(\mu, \Omega)$. Osoita, että

   $$a + B^T Y \sim N_q\left(a + B^T \mu, B^T \Omega B\right),$$

   missä $1 \leq q \leq p$, $a \in \mathbf{R}^q$ ja B on $p \times q$-matriisi. Vot käyttää tietoa, että Y:n momentit generoiva funktio on $M_Y(t) = \exp\left\{\mu^T t + \frac{1}{2} t^T \Omega t\right\}$.