Tilastollinen päättely II
Laskuharjoitus 6

2015, helmikuu 25

1 Laskutehtäviä

1. Tiheysfunktio t-jakaumalle on

$$f(t) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)}\,(1+t^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

missä $\nu > 0$ on vapausasteparametri. Osoita, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^p f(t)\,dt < \infty,$$

kun $\nu > p$, missä $p \geq 0$. Ohje: riittää osoittaa, että $\int_M^\infty t^p f(t)\,dt < \infty$, missä $M > 0$.

2. Olkoot W_1, W_2, X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia ja $W_1 \sim N(\mu_W, \sigma^2)$, $W_2 \sim N(\mu_W, \sigma^2)$, $X_1 \sim N(\mu_X, \sigma^2)$, $X_2 \sim N(\mu_X, \sigma^2)$. Johda satunnaisvektorin

$$((W_1 + W_2)/2 - \mu_W, (X_1 + X_2)/2 - \mu_X, W_1 - W_2, X_1 - X_2)$$

jakauma.

3. Olkoon $Y = (Y_1, Y_2)' \sim N(\mu, \Sigma)$, missä $\mu = (0,0)'$ ja

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Johda satunnaismuuttujan $Y_1 \,|\, Y_2 = y_2$ jakauma.

4. Olkoon Y reaaliarvoinen satunnaismuuttuja, $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ aidosti vähenevä ja $Z = h(Y)$. Osoita, että Z:n tiheysfunktio on

$$f_Z(z) = f_Y\left(h^{-1}(z)\right)\,\frac{1}{|h'(h^{-1}(z))|}\,.$$

2 Tietokonetehtävä

5. (a) Estimoi varianssi suureen $Em(Y)$ Monte Carlo -estimaattorille, kun $m(y) = I_{(-\infty,-2]}(y)$ ja $Y \sim N(0,1)$.

   Estimoi varianssi poimimalla $M = 1000$ kappaletta $n = 100$ suuruisia otoksia $N(0,1)$ jakaumasta ja laskemalla kustakin otoksesta estimaatti ja lopuksi laskemalla estimaattien varianssi.

   (b) Estimoi varianssi suureen $Em(Y)$ Monte Carlo -estimaattorille kun käytetään tärkeysotantaa (importance sampling) ja $m(y) = I_{(-\infty,-2]}(y)$ sekä $Y \sim N(0,1)$.

   Estimoi varianssi poimimalla $M = 1000$ kappaletta $n = 100$ suuruisia otoksia $N(0,1)$ jakaumasta ja laskemalla kustakin otoksesta estimaatti ja lopuksi laskemalla estimaattien varianssi.

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoituksiin)

1. Määrittele seuraavat jakaumat.

   (a) Kirjoita yksiulotteisen normaalijakauman tiheysfunktio.

   (b) Määrittele χ^2-jakauma normaalijakauman avulla.

   (c) Määrittele t-jakauma normaalijakauman ja χ^2-jakauman avulla.

   (d) Määrittele F-jakauma χ^2-jakauman avulla.

2. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia normaalijakaumalla $N(\mu, \sigma^2)$. Oletetaan tunnetuksi, että

   (a) $\bar{Y} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, missä $\bar{Y} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} Y_i$,

   (b) $s^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{n-1}/(n-1)$, missä $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2$.

   (c) $\bar{Y}$ ja s^2 ovat riippumattomia.

   Mitä jakaumaa noudattaa suure

   $$\frac{\bar{Y} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}\,?$$

   Johda luottamusväli parametrille μ.