# Tilastollinen päättely II
# Laskuharjoitus 7

2015, maaliskuu 4

## 1 Laskutehtäviä

1. Oletetaan, että havainnot $Y_1, \dots, Y_n$ noudattavat kahden askeleen autoregressiivistä mallia

$$Y_j = \beta_1 Y_{j-1} + \beta_2 Y_{j-1} + \epsilon_j, \qquad j = 3, \dots, n,$$

missä $\epsilon_j$ on riippumaton satunnaismuuttujista $Y_j, Y_{j-1}, \dots$, $\epsilon_i$ ja $\epsilon_j$ ovat riippumattomia kun $i \neq j$ ja $\epsilon_j \sim N(0, \sigma^2)$. Johda lauseke otoksen $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ tiheysfunktiolle.

2. Laske uskottavuusfunktio otokselle $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, kun $Y_1, \dots, Y_n$ ovat i.i.d. diskreettejä satunnaismuuttujia ja yhden havainnon jakaumalle pätee

$$P(Y_1 = y_1) = p(1-p)^{y_1}, \qquad y_1 = 0, 1, \dots,$$

missä $0 < p < 1$.

3. Osoita, että

$$l(\theta) = l_1(\theta) + l_2(\theta),$$

missä $l$ on otoksen $Y_1, \dots, Y_n, X_1, \dots, X_m$ logaritminen uskottavuusfunktio, $l_1$ on otoksen $Y_1, \dots, Y_n$ logaritminen uskottavuusfunktio, $l_2$ on otoksen $X_1, \dots, X_m$ logaritminen uskottavuusfunktio sekä otokset $Y_1, \dots, Y_n$ ja $X_1, \dots, X_m$ ovat riippumattomia.

4. (a) Olkoon $Y_1, \dots, Y_n$ i.i.d. otos tiheysfunktion

$$f(y_1, \theta) = \theta y_1^{\theta - 1}, \qquad 0 < y_1 < 1, \theta > 0,$$

jakaumasta. Johda suurimman uskottavuuden estimaattori.

(b) Olkoon $Y_1, \dots, Y_n$ i.i.d. otos tiheysfunktion

$$f(y_1, \theta) = \theta^2 y_1 e^{-\theta y_1}, \qquad y_1 > 0, \theta > 0,$$

jakaumasta. Johda suurimman uskottavuuden estimaattori.

(c) Olkoon $Y_1, \dots, Y_n$ i.i.d. otos tiheysfunktion

$$f(y_1, \theta) = (\theta + 1)\, y_1^{\theta - 2}, \qquad y_1 > 1, \theta > 0,$$

jakaumasta. Johda suurimman uskottavuuden estimaattori.

5. Piirrä uskottavuusfunktion $L(\theta)$, $\theta \in \mathbf{R}$, kuvaaja, kun i.i.d. otos $Y_1, \dots, Y_n$ on poimittu tiheysfunktion

$$f(y_1, \theta) = \frac{1}{2c}\, I_{[\theta - c, \theta + c]}(y_1), \qquad y_1 \in \mathbf{R},$$

jakaumasta, missä $c > 0$ on tunnettu. Mikä on suurimman uskottavuuden estimaattori parametrille $\theta$?

# 2 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoituksiin)

1. Olkoon $Y_1, \dots, Y_n$ otos. Osoita, että otoksen tiheysfunktiolle pätee

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = f_{Y_1}(y_1) \prod_{j=2}^{n} f_{Y_j | Y_{j-1} = y_{j-1}, \dots, Y_1 = y_1}(y_i).$$

2. Olkoon käytettävissä havainto $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, joka noudattaa binomijakaumaa parametrilla $0 < p < 1$. Laske Fisherin informaatio $I(p)$.

3. Olkoon otos $Y_1, \dots, Y_n$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, missä $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$. Laske Fisherin informaatio $I(\theta)$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$, missä $\mu \in \mathbf{R}$ ja $\sigma^2 > 0$.