Tilastollinen päättely II
Laskuharjoitus 8

2015, maaliskuu 18

1 Laskutehtäviä

1. Johda parametrin $\beta \in \mathbf{R}$ suurimman uskottavuuden estimaattori, kun havainnot $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat ensimmäisen kertaluvun autoregressiivisestä mallista
$$Y_j = \beta Y_{j-1} + \epsilon_j, \qquad j = 2, \ldots, n,$$
ja $Y_1 \sim N(0,1)$, missä $\epsilon_j \sim N(0,1)$ sekä ϵ_j ovat keskenään riippumattomia ja ϵ_j on riippumaton Y_{j-1}:stä.

2. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. otos tiheysfunktion
$$f(y_1, \theta) = \theta^{-1}\, e^{-y_1/\theta}, \qquad y_1 > 0, \theta > 0,$$
jakaumasta.
   (a) Johda suurimman uskottavuuden estimaattori.
   (b) Osoita, että suurimman uskottavuuden estimaattori noudattaa asymptoottisesti normaalijakaumaa $N(\theta, \theta^2/n)$.

3. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. otos tiheysfunktion
$$f(y_1, \theta) = \theta^{-1}\, e^{-y_1/\theta}, \qquad y_1 > 0, \theta > 0,$$
jakaumasta.

   Johda luottamusväli parametrille θ käyttäen suurimman uskottavuuden estimaattorin asymptoottista jakaumaa.

4. Olkoot havainnot $(Y_1, X_1), \ldots, (Y_n, X_n)$, missä

$$Y_i = \beta^T X_i + \epsilon_i,$$

missä $Y_i \in \mathbf{R}$, $X_i \in \mathbf{R}^p$, $\beta \in \mathbf{R}^p$, X_i ja ϵ_i ovat riippumattomia, ϵ_i ovat keskenään riippumattomia ja $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Laske havaittu informaatiomatriisi $J(\beta, \sigma^2)$.

5. Olkoot havainnot $(Y_1, X_1), \ldots, (Y_n, X_n)$, missä

$$Y_i = \beta^T X_i + \epsilon_i,$$

missä $Y_i \in \mathbf{R}$, $X_i \in \mathbf{R}^p$, $\beta \in \mathbf{R}^p$, X_i ja ϵ_i ovat riippumattomia, ϵ_i ovat keskenään riippumattomia ja $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Laske Fisher-informaatiomatriisi $I(\beta, \sigma^2)$ (odotettu informaatiomatriisi).

2 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoituksiin)

1. Olkoon havaintojen $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ tiheysfunktio $f_Y(y, \theta)$, missä $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ja $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$. Olkoon

$$S(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log f_Y(Y, \theta)$$

pistelukuvektori (score statistic). Osoita, että sopivien säännöllisyysehtojen vallitessa

$$ES(\theta) = 0,$$

missä odotusarvo on otettu jakauman $f_Y(y, \theta)$ suhteen.

2. Olkoon havaintojen $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ tiheysfunktio $f_Y(y, \theta)$, missä $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ja $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$. Olkoon Fisher-informaatio määritelty kaavalla

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f_Y(Y, \theta)\right],$$

missä odotusarvo on otettu jakauman $f_Y(y, \theta)$ suhteen. Osoita, että sopivien säännöllisyysehtojen vallitessa

$$I(\theta) = \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f_Y(y, \theta)\right)^2 \frac{1}{f_Y(y, \theta)}\, dy.$$

3. Olkoon

$$W(\theta) = 2[l(\hat{\theta}) - l(\theta)]$$

uskottavuusosamäärätunnusluku (likelihood ratio statistic), missä $\hat{\theta}$ on suurimman uskottavuuden estimaattori ja $l(\theta) = \log f_Y(y, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^p$, kun $f_Y(y, \theta)$ on otoksen tiheysfunktio. Osoita, että sopivien säännöllisyysoletusten vallitessa

$$W(\theta) \doteq (\theta - \hat{\theta})^T J(\hat{\theta})(\theta - \hat{\theta}),$$

missä

$$J(\theta) = -\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\theta^T}\, l(\theta)$$

on havaittu informaatio.