Tilastollinen päättely II
Laskuharjoitus 9

2015, maaliskuu 25

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon $Y_1, \dots, Y_n$ i.i.d. otos $N(\mu, \sigma^2)$ jakaumasta, kun σ^2 on tunnettu. Uskottavuusosamäärätunnusluku on määritelty kaavalla
$$\mathrm{LR}(\mu) = 2[l(\hat{\mu}) - l(\mu)],$$
missä $\hat{\mu}$ on suurimman uskottavuuden estimaattori. Osoita, että
$$\mathrm{LR}(\mu) = \frac{n}{\sigma^2}(\mu - \bar{Y})^2,$$
missä $\bar{Y} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

2. Johda edellisen tehtävän tapauksessa tunnusluvun $\mathrm{LR}(\mu)$ asymptoottinen jakauma.

3. Johda edellisen tehtävän avulla likimääräinen luottamusväli parametrille μ.

4. Olkoot $Y_1, \dots, Y_n$ i.i.d. jakaumalla $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ja $Z_1, \dots, Z_n$ i.i.d. jakaumalla $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Olkoot $Y_1, \dots, Y_n$ ja $Z_1, \dots, Z_n$ lisäksi toisistaan riippumattomia. Olkoon
$$\Theta = \{(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2) : \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}, \sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0\}$$
ja
$$\Theta_0 = \{(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_1^2) : \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}, \sigma_1^2 > 0\}.$$
Laske
$$\hat{\theta} = \mathrm{argmax}_{\theta \in \Theta} f_{Y,Z}(y, z)$$
ja
$$\hat{\theta}_0 = \mathrm{argmax}_{\theta \in \Theta_0} f_{Y,Z}(y, z).$$
missä $f_{Y,Z}(y, z)$ on otoksen $(Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n)$ tiheysfunktio.

2 Tietokonetehtäviä

Lue data S&P 500 osakeindeksin hinnoista R:ään ja muuta hintojen aikasarja tuottojen aikasarjaksi käyttällä komentoja

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/stainf/sp500.csv"
data<-read.csv(file=file)
sp500<-data[,7]
sp500<-sp500[length(sp500):1]
pituus<-length(sp500)
tuotto<-log(sp500[2:pituus])-log(sp500[1:(pituus-1)])
plot(tuotto,type="l")
```

5.a Oletetaan, että S&P 500 indeksin päivätuotot noudattavat normaalijakaumaa. Estimoi jakauman odotusarvo käyttäen suurimman uskottavuuden estimaattia ja numeerista optimointia. Oletetaan, että tuottojen keskihajonta on tunnettu ja yhtäsuuri kuin otoskeskihajonta. R sisaltaa optimointiohjelmat nlm(), optimize() ja optim(), joten voit käyttää esimerkiksi näitä ohjelmia.

5.b Oletetaan, että S&P 500 indeksin päivätuotot noudattavat normaalijakaumaa. Estimoi jakauman odotusarvo ja keskihajonta käyttäen suurimman uskittavuuden estimaatteja ja numeerista optimointia. R sisaltaa optimointiohjelmat nlm(), optimize() ja optim(), joten voit käyttää esimerkiksi näitä ohjelmia.

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoituksiin)

1. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d jakaumasta $f(y, \theta)$, missä $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^p$ on parametrivektori. Tarkastellaan uskottavuusosamäärätunnuslukua

$$\mathrm{LR}(\theta_0) = 2[l(\hat{\theta}) - l(\theta_0)],$$

missä $l(\theta)$ on logaritminen uskottavuusfunktio ja $\hat{\theta}$ on suurimman uskottavuuden estimaattori.

(a) Perustele, että

$$\mathrm{LR}(\theta_0) = (\hat{\theta} - \theta_0)' I(\theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0) + o_p(1),$$

kun $n \to \infty$, missä $I(\theta)$ on informaatiomatriisi.

(b) Perustele, että

$$\mathrm{LR}(\theta_0) \xrightarrow{d} \chi^2_p,$$

kun $n \to \infty$.

2. Olkoon $\{f_Y(y,\theta) : \theta \in \Theta\}$ joukko tiheysfunktioita. Määrittele mitä tarkoittaa, että parametri θ on identifioituva ja anna esimerkki, jossa parametri θ ei ole identifioituva.