

Aikasarja-analyysi

Laskuharjoitus 2

2013, Marraskuu 5

1 Laskutehtäviä

1. Tarkastellaan AR(1)-mallia

$$X_t = bX_{t-1} + \epsilon_t, \quad t = \dots, -1, 0, 1, \dots,$$

missä $\{\epsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ ja $|b| < 1$. Osoita, että

$$\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - b^2}.$$

Ohje: voidaan olettaa tunnetuksi, että $\{X_t\}$ on stationaarinen.

2. Tarkastellaan AR(1)-mallia

$$X_t = bX_{t-1} + \epsilon_t, \quad t = \dots, -1, 0, 1, \dots,$$

missä $\{\epsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ ja $|b| < 1$. Havaitaan aikasarjasta jakso

$$X_0, X_1, \dots, X_T.$$

Johda pienimmän neliösumman estimaattori \hat{b} parametrille b :

$$\hat{b} = \underset{b \in \mathbf{R}}{\text{argmin}} \sum_{t=1}^T (X_t - bX_{t-1})^2.$$

3. Tarkastellaan MA(1)-mallia

$$X_t = \epsilon_t + a\epsilon_{t-1},$$

missä $\{\epsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ ja $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. Mitä jakaumaa X_t noudattaa?

4. Osoita, että seuraavat aikasarjat eivät ole stationaarisia:

(a) $X_t = \mu t + \epsilon_t$, missä $\mu \in \mathbf{R}$ ja $\{\epsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$,

(b) $X_t = \sigma_t \epsilon_t$, missä $\sigma_t = \sigma \sqrt{t}$ ja $\{\epsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$,

(c) $X_0 = 0$, $X_t = X_{t-1} + \epsilon_t$, $t = 1, 2, \dots$, missä $\{\epsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$,
 $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

2 Tietokonetehtäviä

5. (a) Simuloi AR(1)-aikasarjaa

$$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

missä $T = 1000$, $X_0 = 0$ ja $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ ovat i.i.d.

Kokeile arvoja $0 < a < 1$, $-1 < a < 0$, $a = 1$, $a = -1$, $a = 1.1$ ja $a = -1.1$.

Kokeile t -jakaumaa vapausastein n virhetermin jakaumana: $\epsilon_t \sim t(n)$ ovat i.i.d, missä $n = 1, 2, 3, \dots$

(b) Simuloi MA(1)-aikasarjaa

$$X_t = \epsilon_t + a\epsilon_{t-1}, \quad t = 1, \dots, T,$$

missä $T = 1000$ ja $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ ovat i.i.d.

Kokeile eri arvoja a .

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Määrittele valkoisen kohinan aikasarja (white noise).

2. Määrittele Gaussin aikasarja.

3. Määrittele AR(p) aikasarja.

4. Määrittele MA(q) aikasarja.

5. Määrittele ARMA(p, q) aikasarja käyttäen viivästysoperaattoria (back-shift operator).

6. Määrittele ARIMA(p, q) aikasarja.

7. Määrittele ARCH(q) aikasarja.
8. Määrittele GARCH(p, q) aikasarja.
9. Määrittele NARCH aikasarja (nonparametric autoregressive conditional heteroscedastic model).