Aikasarja-analyysi
Laskuharjoitus 3

2013, Marraskuu 12

1 Laskutehtäviä

1. Määritä vakiot $b_0, \ldots, b_3$ siten, että yhtälö

$$(1-B)^3 Y_t = b_0 Y_t + b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + b_3 Y_{t-3}$$

pätee, missä $B^k Y_t = Y_{t-k}$.

2. Olkoon $\{X_t\}$ MA(1)-prosessi: $X_t = a_0\epsilon_t + a_1\epsilon_{t-1}$, missä $\{\epsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.
   (a) Laske $\mathrm{Var}(X_t)$.
   (b) Laske $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+1})$ ja $\mathrm{Cor}(X_t, X_{t+1})$.
   (c) Olkoon $a_0 = 1$. Mikä a_1:n arvo maksimoi $\mathrm{Cor}(X_t, X_{t+1})$:n?

3. Olkoon $\{X_t\}$ MA(2)-prosessi: $X_t = a_0\epsilon_t + a_1\epsilon_{t-1} + a_2\epsilon_{t-2}$, missä $\{\epsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.
   (a) Laske $\mathrm{Var}(X_t)$.
   (b) Laske $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+1})$ ja $\mathrm{Cor}(X_t, X_{t+1})$.
   (c) Laske $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+2})$ ja $\mathrm{Cor}(X_t, X_{t+2})$.

4. Olkoon $\{X_t\}$ AR(2)-prosessi

$$X_t = b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + \epsilon_t,$$

missä $\{\epsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.
   (a) Olkoon $b_1 = b_2 = 1/2$. Onko $\{X_t\}$ stationaarinen?
   (b) Olkoon $b_1 = 1$ ja $b_2 = -2$. Onko $\{X_t\}$ stationaarinen?

2 Tietokonetehtäviä

5. Simuloi GARCH(1,1)-aikasarjaa

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t, \qquad t = 1, \ldots, T,$$

missä

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \sigma_{t-1}^2 + b X_{t-1}^2,$$

$a_0, a_1, b \geq 0$, $T = 1000$, $X_0 = 0$ ja $\epsilon_t \sim N(0,1)$ ovat i.i.d.

Kokeile eri arvoja $a_1 + b < 1$ ja $a_1 + b \geq 1$.

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Määrittele (heikosti) stationaarinen aikasarja.

2. Määrittele vahvasti stationaarinen aikasarja.

3. Olkoon $\{X_t\} \sim \mathrm{MA}(q)$. Osoita, että $\{X_t\}$ on (heikosti) stationaarinen.

4. Olkoon $\{X_t\}$ MA(∞)-prosessi

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \epsilon_{t-j},$$

missä $\{\epsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. Osoita, että

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+k},$$

missä $k = 0, 1, \ldots$.