

# Aikasarja-analyysi

## Laskuharjoitus 4

2013, Marraskuu 19

### 1 Laskutehtäviä

1. Olkoon  $\{X_t\}$  stationaarinen AR(1)-prosessi:

$$X_t = bX_{t-1} + \epsilon_t,$$

missä  $|b| < 1$  ja  $\{\epsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ . Osoita, että

$$\rho(k) = b^{|k|},$$

missä  $\rho(k) = \text{Cor}(X_t, X_{t+k})$ . Voit laskea tuloksen kahdella tavalla:

- (a) Käytä Yule-Walkerin yhtälöä.
- (b) Käytä yleistä kaavaa AR( $p$ )-prosessille:

$$\rho(k) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} d_j d_{j+|k|}}{\sum_{j=0}^{\infty} d_j^2},$$

missä  $d_0 = 1$  ja  $d_k = \sum_{j=0}^{k-1} d_j b_{k-j}$ .

2. Olkoon  $X_0 = 0$  ja

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t,$$

$t = 1, 2, \dots$ , missä  $\{\epsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ . Laske  $\text{Cov}(X_t, X_{t+k})$  ja  $\text{Cor}(X_t, X_{t+k})$ ,  $k \geq 1$ .

3. Olkoon  $\{X_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ . Olkoon  $X_1, \dots, X_T$  otos aikasarjasta ja oletetaan tunnetuksi, että  $\sqrt{T}\hat{\rho}(j) \xrightarrow{d} N(0, 1)$ , kun  $T \rightarrow \infty$ , missä  $\hat{\rho}(j) = \hat{\gamma}(j)/\hat{\gamma}(0)$ ,  $\hat{\gamma}(j) = T^{-1} \sum_{t=1}^{T-j} X_t X_{t+j}$ .

Määritä  $c_T > 0$  siten, että

$$P(-c_T \leq \hat{\rho}(j) \leq c_T) \rightarrow 1 - \alpha,$$

kun  $T \rightarrow \infty$ , missä  $0 < \alpha < 1$ ,

4. Osoita, että

$$\text{Cov}(R_{1|2}, R_{3|2}) = \text{Cov}(X_1, X_3) - \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)\text{Cov}(X_2, X_3)}{\text{Var}(X_2)},$$

missä  $R_{j|2} = X_j - \alpha_j X_2$ ,  $j = 1, 3$ , ja

$$\alpha_j = \text{argmin}_{\beta \in \mathbf{R}} E(X_j - \beta X_2)^2.$$

Ohje: voit olettaa tunnetuksi, että

$$\alpha_j = \frac{\text{Cov}(X_j, X_2)}{\text{Var}(X_2)}.$$

## 2 Tietokonetehtäviä

5. Tutkitaan S&P 500 osakeindeksin aikasarjaa, joka on saatavissa sivulta

<http://finance.yahoo.com/q/hp?s=GSPC+Historical+Prices>

Aineiston voi lukea R:ään komendoilla

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/timeseries/sp500.csv"
data<-read.csv(file=file)
sp500<-data[,7] # otetaan kunkin päivän lopetuskurssi
sp500<-sp500[length(sp500):1] # aloitetaan aikasarja vanhimmasta havainnosta
```

(a) Laske tuottojen

$$R_t = \frac{\text{SP500}_t - \text{SP500}_{t-1}}{\text{SP500}_{t-1}} = \frac{\text{SP500}_t}{\text{SP500}_{t-1}} - 1$$

aikasarjan autokorrelaatiofunktio  $\rho(k)$ ,  $1 \leq k \leq 30$ .

(b) Laske tuottojen itseisarvojen  $|R_t|$  aikasarjan autokorrelaatiofunktio  $\rho(k)$ ,  $1 \leq k \leq 1000$ .

### 3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Määrittele stationaarisen aikasarjan autokovarianssifunktio ja autokorrelaatiofunktio.
2. Olkoon  $\{X_t\}$  kausaalinen ARMA( $p, q$ )-prosessi

$$X_t = b_1 X_{t-1} + \cdots + b_p X_{t-p} + \epsilon_{t-k} + a_1 \epsilon_{t-k-1} + \cdots + a_q \epsilon_{t-k-q},$$

missä  $\{\epsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ . Johda Yule-Walker yhtälö

$$\gamma(k) = b_1 \gamma(k-1) + \cdots + b_p \gamma(k-p), \quad k > q,$$

missä  $\gamma(k) = \text{Cov}(X_t, X_{t+k})$ .

3. Olkoon  $X_1, \dots, X_T$  otos stationaarisesta aikasarjasta. Määrittele estimaattori autokovarianssille  $\gamma(k) = \text{Cov}(X_t, X_{t+k})$ ,  $0 \leq k \leq T-1$ .
4. Määrittele periodinen prosessi.