Aikasarja-analyysi
Laskuharjoitus 5

2013, Marraskuu 26

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon
$$X_t = A\cos(\omega t + \phi),$$
missä $\phi \sim \mathrm{Unif}([-\pi, \pi])$, $A \in \mathbf{R}$ ja $\omega \in (0, \pi)$. Osoita, että $EX_t = 0$.

2. Olkoon
$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k)\cos(k\omega),$$
missä ρ on autokorrelaatiofunktio.

   (a) Osoita, että
   $$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho(k)\cos(k\omega)\right).$$

   (b) Osoita, että
   $$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k)e^{-ik\omega}.$$

3. Olkoon
$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k)e^{-ik\omega},$$
missä ρ on autokorrelaatiofunktio. Osoita, että
$$\rho(j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\omega} f(\omega)\, d\omega,$$
missä $j \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

4. Laske MA(2)-aikasarjan spektritiheysfunktio.

2 Tietokonetehtäviä

5. Tutkitaan S&P 500 osakeindeksin aikasarjaa, joka on saatavissa sivulta

   `http://finance.yahoo.com/q/hp?s=^GSPC+Historical+Prices`

   Aineiston voi lukea R:ään komennoilla

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/timeseries/sp500.csv"
data<-read.csv(file=file)
sp500<-data[,7]                  # otetaan kunkin päivän lopetuskurssi
sp500<-sp500[length(sp500):1]   # aloitetaan aikasarja vanhimmasta havainnosta
```

   (a) Estimoi ARMA(p,q)-mallin parametrit tuottojen aikasarjalle
   $$R_t = \frac{S\&P500_t - S\&P500_{t-1}}{S\&P500_{t-1}} = \frac{S\&P500_t}{S\&P500_{t-1}} - 1,$$
   kun $p = 1$ ja $q = 1$.

   (b) Estimoi ARMA(p,q)-mallin parametrit tuottojen neliöiden R_t^2 aikasarjalle kun $p = 20$ ja $q = 0$.

   Voit käyttää "tseries"-pakettia, jonka saa käyttöön komennolla "library(tseries)" ja tähän pakettiin kuuluvia funktioita "arma" ja "arima0".

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Olkoon
   $$X_t = \sum_{j=-k}^{k} A_j \cos(\omega_j t + \phi_j),$$
   missä ϕ_j ovat i.i.d., $\phi_j \sim [-\pi,\pi]$, $A_j, \omega_j \in \mathbf{R}$ ovat vakioita, $0 \le \omega_1 < \cdots < \omega_k \le \pi$, $\omega_{-j} = -\omega_j$, $\phi_{-j} = -\phi_j$, $A_{-j} = A_j$, $j = 1,\ldots,k$. Nyt pätee, että $EX_t = 0$ ja
   $$\gamma(\tau) = E(X_t X_{t+\tau}) = \sum_{j=-k}^{k} A_j^2 \cos(\omega_j \tau).$$
   Mikä on aikasarjan $\{X_t\}$ spektrijakauman kertymäfunktio ja normalisoimaton kertymäfunktio?

2. Laske valkoisen kohinan spektritiheysfunktio.

3. Olkoon $\{X_t\}$ stationaarinen ARMA(p, q) prosessi

$$X_t = b_1 X_{t-1} + \cdots + b_p X_{t-p} + \epsilon_t + a_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + a_q \epsilon_{t-q}.$$

Osoita, että aikasarjan $\{X_t\}$ normalisoimaton spektritiheysfunktio toteuttaa

$$g_X(\omega) = g_\epsilon(\omega) \frac{|\Gamma_2(\omega)|^2}{|\Gamma_1(\omega)|^2}$$

missä $g_\epsilon(\omega)$ on aikasarjan $\{\epsilon_t\}$ normalisoimaton spektritiheysfunktio,

$$\Gamma_1(\omega) = 1 - \sum_{j=1}^{p} b_j e^{-ij\omega},$$

ja

$$\Gamma_1(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^{p} a_j e^{-ij\omega}.$$

4. Määrittele spektritiheysfunktion estimaattori stationaariselle aikasarjalle, jolle pätee $\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| < \infty$, missä ρ on aikasarjan autokorrelaatiofunktio.