Aikasarja-analyysi
Laskuharjoitus 6

2013, Joulukuu 3

1 Laskutehtäviä

1. Olkoot $\{X_t\}$ ja $\{Y_t\}$ korreloimattomia stationaarisia aikasarjoja joilla on spektritiheysfunktiot f_X ja f_Y. Laske aikasarjan $\{X_t + Y_t\}$ spektritiheysfunktio.

2. Olkoon
$$X_t = \frac{1}{2}\left(Y_t - Y_{t-3}\right).$$
Osoita, että
$$|\Gamma(\omega)|^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(3\omega)\right],$$
missä Γ on siirtofunktio (transfer function).

3. Havaitaan realisaatio $X_1 = x_1, \ldots, X_T = x_T$ ARMA(p,q)-aikasarjasta. Määritellään suurimman uskottavuuden estimaattori
$$(\hat{b}, \hat{a}, \hat{\sigma}^2) = \operatorname{argmax}_{(b,a)\in\mathcal{B},\sigma^2>0} L(b, a, \sigma^2),$$
missä $b = (b_1, \ldots, b_p)$, $a = (a_1, \ldots, a_q)$,
$$L(b, a, \sigma^2) = (\sigma^2)^{-T/2}(r_0 \cdots r_{T-1})^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{T-1}\frac{(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1})^2}{r_k}\right\},$$
$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}(b, a)$, $r_k = r_k(b, a)$. Osoita, että
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1}\frac{(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1})^2}{r_k},$$
missä $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}(\hat{b}, \hat{a})$ ja $r_k = r_k(\hat{b}, \hat{a})$.

4. Tarkastellaan AR(2) prosessia

$$X_t - b_1 X_{t-1} - b_2 X_{t-2} = \epsilon_t. \tag{1}$$

   (a) Johda kahden yhtälön yhtälöryhmä, jonka ratkaisuna saadaan pienimmän neliösumman estimaattorit

   $$(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = \mathrm{argmin}_{b_1, b_2 \in \mathbf{R}} \sum_{t=3}^{T} \left(X_t - b_1 X_{t-1} - b_2 X_{t-2} \right)^2 .$$

   (b) Kerro yhtälön (1) molemmat puolet vuorotellen muuttujilla X_t, X_{t-1} ja X_{t-2}, ota odotusarvot yhtälön molemmista puolista ja korvaa odotusarvot keskiarvoilla. Vertaa saatua Yule-Walker-estimaattorin kolmen yhtälön yhtälöryhmää pienimmän neliösumman yhtälöryhmään.

2 Tietokonetehtäviä

5. Tutkitaan S&P 500 osakeindeksin aikasarjaa, joka on saatavissa sivulta

   http://finance.yahoo.com/q/hp?s=^GSPC+Historical+Prices

   Aineiston voi lukea R:ään komennoilla

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/timeseries/sp500.csv"
data<-read.csv(file=file)
sp500<-data[,7]                   # otetaan kunkin päivän lopetuskurssi
sp500<-sp500[length(sp500):1]   # aloitetaan aikasarja vanhimmasta havainnosta
```

   (a) Olkoon

   $$R_t = \frac{S\&P500_t - S\&P500_{t-1}}{S\&P500_{t-1}} .$$

   Sovita AR(p)-malli tuottoihin, tuottojen itseisarvoihin $|R_t|$ tai tuottojen neliöihin R_t^2 ja piirrä aikasarjakuvio residuaaleista sekä korrelogrammi residuaaleista. Kokeile eri p:n arvoja.

   (b) Hae p:n arvo joka minimoi AIC-kriteerin.

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. (a) Osoita, että vektorin $X_1, \ldots, X_T$ tiheysfunktiolle pätee

$$\begin{aligned} & f_{X_1,\ldots,X_T}(x_1, \ldots, x_T) \\ = & \ f_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p) \prod_{t=p+1}^{T} f_{X_t|X_{t-1}=x_{t-1},\ldots,X_1=x_1}(x_t), \end{aligned}$$

missä $f_{X_t|X_{t-1}=x_{t-1},\ldots,X_1=x_1}$ on ehdollisen jakauman

$$X_t|X_{t-1} = x_{t-1}, \ldots, X_1 = x_1$$

tiheysfunktio.

(b) Olkoon $\{X_t\}$ AR(p) mallia noudattava aikasarja

$$X_t = b_1 X_{t-1} + \cdots + b_p X_{t-p} + \epsilon_t,$$

missä $\{\epsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. Olkoon lisäksi $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. Osoita, että

$$\begin{aligned} & f_{X_1,\ldots,X_T}(x_1, \ldots, x_T) \\ = & \ f_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p) \\ & \times[(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}]^{T-p} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^{T} (x_t - b_1 x_{t-1} - \cdots - b_p x_{t-p})^2 \right\}. \end{aligned}$$

2. Havaitaan realisaatio $X_1, \ldots, X_T$. Merkitään $\hat{X}_1 = 0$ ja

$$\hat{X}_{k+1} = \phi_{k1} X_k + \cdots + \phi_{kk} X_1 = \sum_{j=1}^{k} \phi_{kj} X_{k-j+1},$$

$k = 1, \ldots, T-1$, missä

$$(\phi_{k1}, \ldots, \phi_{kk}) = \mathrm{argmin}_{\psi_1,\ldots,\psi_k \in \mathbf{R}} E\left(X_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \psi_{kj} X_{k-j+1} \right)^2.$$

Osoita, että

$$\mathrm{Cov}(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1}, X_i) = 0,$$

kun $i = 1, \ldots, k$.

3. Olkoon $b = (b_1, \ldots, b_p)$ AR(p)-prosessin parametri. Oletetaan tunnetuksi, että

$$\sqrt{T}\,(\hat{b} - b) \xrightarrow{d} N(0, W),$$

kun $T \to \infty$, missä W on $p \times p$-kovarianssimatriisi. Määritä $c \in \mathbf{R}$ ja $p \times p$-matriisi C siten, että

$$P\left\{(\hat{b} - b)C^{-1}(\hat{b} - b) \leq c\right\} \longrightarrow 1 - \alpha,$$

kun $T \to \infty$, missä $0 < \alpha < 1$.