Aikasarja-analyysi
Laskuharjoitus 7

2013, Joulukuu 10

1 Laskutehtäviä

1. Olkoon $\{X_t\}$ stationaarinen aikasarja ja $EX_t = 0$. Olkoon γ aikasarjan autokovarianssifunktio. Parhaat lineaariset ennusteet X_{k+1}:lle arvojen $X_1, \ldots, X_k$ perusteella saadaan kaavoista $\hat{X}_1 = 0$ ja
$$\hat{X}_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \theta_{kj} \left(X_{k+1-j} - \hat{X}_{k+1-j} \right),$$
missä $k = 1, \ldots, T-1$. Mitkä lausekkeet innovaatioalgoritmi antaa luvuille θ_{11}, ν_1, θ_{22}, θ_{21}, ν_2?

   (Luvut ν_k toteuttavat, että $\mathrm{Var}(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1}) = \nu_k$, $k = 0, \ldots, T-1$.)

2. Olkoon $\{X_t\} \sim \mathrm{AR}(2)$: $X_t = b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + \epsilon_t$, missä $\{\epsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. Olkoon $X_T(m) = E(X_{T+m} \,|\, X_1, \ldots, X_T)$. Laske $X_T(1)$, $X_T(2)$ ja $X_T(3)$. Voit käyttää kaavaa $X_T(m) = b_1 X_T(m-1) + b_2 X_T(m-2)$.

3. Olkoon $\{X_t\} \sim \mathrm{GARCH}(p, q)$ ja merkitään $X_t = \sigma_t \epsilon_t$, missä
$$\sigma_t^2 = c_0 + \sum_{i=1}^{p} b_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} a_j \sigma_{t-j}^2.$$
Osoita, että
$$\mathrm{Var}(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma_t^2.$$

4. Olkoon $\{X_t\}$ stationaarinen $\mathrm{GARCH}(p, q)$-aikasarja Osoita, että
$$EX_t^2 = \frac{c_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} b_i - \sum_{j=1}^{q} a_j}.$$

2 Tietokonetehtäviä

5. Tutkitaan S&P 500 osakeindeksin aikasarjaa, joka on saatavissa sivulta

   `http://finance.yahoo.com/q/hp?s=^GSPC+Historical+Prices`

   Aineiston voi lukea R:ään komennoilla

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/timeseries/sp500.csv"
data<-read.csv(file=file)
sp500<-data[,7]                # otetaan kunkin päivän lopetuskurssi
sp500<-sp500[length(sp500):1]  # aloitetaan aikasarja vanhimmasta havainnosta
```

   (a) Olkoon
   $$X_t = \frac{S\&P500_t - S\&P500_{t-1}}{S\&P500_{t-1}}\,.$$
   Sovita GARCH$(1,1)$- ja GARCH$(1,3)$-malli tuottoihin.

   (b) Laske estimoidut ehdolliset varianssit
   $$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{c}_0 + \hat{b}X_{t-1}^2 + \hat{a}\hat{\sigma}_{t-1}^2$$
   ja piirrä aikasarjakuvio estimaateista $\hat{\sigma}_t$.

   (c) Laske residuaalit
   $$\hat{\epsilon}_t = X_t/\hat{\sigma}_t$$
   ja piirrä niistä aikasarjakuvio.

   Huom. Voit verrata analyysia kurssikirjan luvun 4.2.8 analyysiin.

3 Kertaustehtäviä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Olkoon $\{X_t\}$ stationaarinen ARCH(p)-prosessi ja oletetaan, että $EX_t^4 < \infty$ ja $E\epsilon_t^4 < \infty$. Osoita, että $\{X_t^2\}$ on AR(p)-prosessi.

2. Olkoon $\{X_t\}$ stationaarinen GARCH(p,q)-prosessi ja oletetaan, että $EX_t^4 < \infty$ ja $E\epsilon_t^4 < \infty$. Osoita, että $\{X_t^2\}$ on ARMA$(p \vee q, q)$-prosessi, missä $p \vee q = \max\{p,q\}$.

3. Olkoon $\{X_t\}$ stationaarinen GARCH(p,q)-aikasarja. Osoita, että $\{X_t\} \sim$ WN$(0, EX_t^2)$.

4. (a) Osoita, että vektorin $X_1, \ldots, X_T$ tiheysfunktiolle pätee

$$\begin{aligned} & f_{X_1,\ldots,X_T}(x_1, \ldots, x_T) \\ = \; & f_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p) \prod_{t=p+1}^{T} f_{X_t|X_{t-1}=x_{t-1},\ldots,X_1=x_1}(x_t), \end{aligned}$$

missä $f_{X_t|X_{t-1}=x_{t-1},\ldots,X_1=x_1}$ on ehdollisen jakauman

$$X_t | X_{t-1} = x_{t-1}, \ldots, X_1 = x_1$$

tiheysfunktio.

(b) Olkoon $\{X_t\}$ ARCH(p) mallia noudattava aikasarja

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

missä

$$\sigma_t^2 = c_0 + b_1 X_{t-1}^2 + \cdots + b_p X_{t-p}^2,$$

missä $\{\epsilon_t\} \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2)$ ja ϵ_t on riippumaton muuttujista $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$. Olkoon lisäksi ϵ_t:n tiheysfunktio $f_\epsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Osoita, että

$$f_{X_1,\ldots,X_T}(x_1, \ldots, x_T) = f_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p) \prod_{t=p+1}^{T} \frac{1}{\sigma_t} f_\epsilon \left(\frac{x_t}{\sigma_t} \right).$$